

確 認 試 験 問 題

式 と 証 明

(配点 100 点)

(日付) 年 月 日

(開始)

--	--	--	--	--

 :

--	--	--	--	--

 ~ (90 分) ~

--	--	--	--	--

 :

--	--	--	--	--

 (終了)

注 意 事 項

1. 上の日付の欄に、試験を行う日付を記入しなさい。
2. 上の開始と終了の欄に、試験開始予定の時刻とその 90 分後の時刻を、それぞれ記入しなさい。試験はその時間内に行われます。
3. 試験に関係の無い物の持ち込みは、原則として認められません。
4. 試験時間中は、アラーム機能以外での電子機器の使用は認められません。
5. 試験開始の時刻になるまで、この試験の問題を見てはいけません。
6. この問題冊子は全部で 6 ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があれば、監督者に知らせなさい。
7. この試験は 5 問で構成されています。解答用紙は第 1 問から第 5 問までに対応するものを用意しなさい。
8. 解答には、黒色鉛筆か、または黒色シャープペンシルを使用しなさい。
9. 解答用紙の指定欄に、試験名、氏名、学生番号を記入しなさい。
10. 問題ごとに、解答欄が指定されています。解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
11. 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
12. この問題冊子の余白は、書き込みに関しては自由に使用してもよいが、どのページも破棄してはいけません。
13. 試験時間中は、やむを得ない場合を除き、退場してはいけません。
14. 試験後は、問題用紙と解答用紙を自由に活用しなさい。

第 1 問

(配点 20)

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) $x^6 + 4x^4$ を $x^2 - 2x + 2$ で割ったときの商と余りを求めよ。
- (2) $x^2 + x + 2$ で割ると $3x + 2$ 余るような整式のうち、3 次式であるようなものを 1 つ求めよ。
- (3) 次の式を計算し、簡単にせよ。

$$\frac{b^3(y-1)}{4ab^2x(x-1)} \times \frac{a^3x+2a^3}{xy-x+y-1} \times \frac{2x^3-2x}{3a^2b}$$

- (4) 次の式を計算し、簡単にせよ。

$$\frac{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}}$$

- (5) 次の式を計算し、簡単にせよ。

$$\frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{1 + \frac{5}{x+1}}}}}$$

第 2 問

(配点 20)

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 次の式が実数 x, y, z についての恒等式であることを証明せよ。

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = -3\{xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x)\}$$

- (2) 次の式が実数 x についての恒等式となるとき、実数 a, b, c の値を求めよ。

$$a(x-1)(x-2) + b(x+1)(x-2) + c(x-1)(x+1) = -4x^2 + 3x + 19$$

- (3) $x^3 + kx^2 + lx + 7$ を $(x+1)^2$ で割ったとき商が $x+m$ 、余りが $2x+1$ であった。
このとき、実数 k, l, m の値を求めよ。

- (4) 次の式が実数 x, y についての恒等式となるとき、実数 p, q, r, s の値を求めよ。

$$(x+py-2)(3x+5y+q) = 3x^2 + 14xy + ry^2 + sx - 31y + 14$$

第 3 問

(配点 20)

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 0 でない実数 a, b, c が $a + b + c = 0$ を満たすとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} = 3$$

- (2) 実数 p, q, r が次の式を満たしているとする。

$$p^2 + q^2 + r^2 \neq 0, \quad \frac{p+q}{3} = \frac{q+r}{4} = \frac{r+p}{5}$$

このとき、次の式の値を求めよ。

$$\frac{pq + qr + rp}{p^2 + q^2 + r^2}$$

- (3) 実数 s, t, u が次の式を満たしているとする。

$$s + t + u = 3, \quad st + tu + us = 3$$

このとき、 s, t, u の値はすべて 1 であることを証明せよ。

- (4) 実数 x, y, z, k が次の式を満たすとき、 k の値を求めよ。

$$xyz \neq 0, \quad \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = \frac{x+y}{z} = k$$

第 4 問

(配点 20)

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 実数 a, b が $a > b > 0$ を満たすとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{3a}{a+2} > \frac{3b}{b+2}$$

- (2) 実数 c, d について、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$2c^2 + 5d^2 + 8 \geq 6cd + 4d$$

- (3) 実数 p, q について、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$|p| - |q| \leq |p + q| \leq |p| + |q|$$

- (4) 実数 s, t, x, y について、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$(s^2 + t^2)(x^2 + y^2) \geq (sx + ty)^2$$

第 5 問

(配点 20)

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 実数 a, b が $a > 0, b > 0$ を満たすとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。
また、等号が成り立つのはどのようなときか述べよ。

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

- (2) 実数 x が $x > 0$ の範囲を動くとき、 $x + \frac{1}{x}$ のとる最小値を求めよ。
- (3) 実数 k が $k > 0$ の範囲を動くとき、 $k + \frac{2}{k+1}$ のとる最小値を求めよ。
- (4) 実数 s, t が

$$s > 0, \quad t > 0, \quad s + t = 1$$

を満たすとき、 $\frac{4}{s} + \frac{9}{t}$ のとる最小値を求めよ。