
確 認 試 験 問 題

式 と 証 明

解 答 例 ・ 解 説

試験時間： 90 分

問題数： 5 問

配点： 100 点

最終改訂日：2026/07/04

1 第1問：多項式の除算と式の計算

1.1 問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) $x^6 + 4x^4$ を $x^2 - 2x + 2$ で割ったときの商と余りを求めよ。
 (2) $x^2 + x + 2$ で割ると $3x + 2$ 余るような整式のうち、3次式であるようなものを1つ求めよ。
 (3) 次の式を計算し、簡単にせよ。

$$\frac{b^3(y-1)}{4ab^2x(x-1)} \times \frac{a^3x+2a^3}{xy-x+y-1} \times \frac{2x^3-2x}{3a^2b}$$

- (4) 次の式を計算し、簡単にせよ。

$$\frac{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}}$$

- (5) 次の式を計算し、簡単にせよ。

$$\frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{1 + \frac{5}{x+1}}}}}$$

1.2 解答

- (1) 次のように割り算を行えるため、商は $x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x + 4$ 、余りは $-8x - 8$ である。

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 8x + 4 \\ x^2 - 2x + 2 \overline{) x^6 + 4x^4 + 4} \\ \underline{x^6 - 2x^5 + 2x^4} + 4 \\ 2x^5 + 2x^4 + 4 \\ \underline{2x^5 - 4x^4 + 4x^3} + 4 \\ 6x^4 - 4x^3 + 4 \\ \underline{6x^4 - 12x^3 + 12x^2} + 4 \\ 8x^3 - 12x^2 + 4 \\ \underline{8x^3 - 16x^2 + 16x} \\ 4x^2 - 16x \\ \underline{4x^2 - 8x + 8} \\ -8x - 8 \end{array}$$

- (2) 与えられた割り算の割られる整式を $P(x)$ 、商を $Q(x)$ とすると、

$$P(x) = (x^2 + x + 2)Q(x) + 3x + 2$$

が成り立つ。 $P(x)$ を 3 次式にするために、例えば $Q(x) = x$ とすると、

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 + x + 2)x + 3x + 2 \\ &= x^3 + x^2 + 5x + 2 \end{aligned}$$

となり，題意を満たす3次式が得られた。

(3)

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{b^3(y-1)}{4ab^2x(x-1)} \times \frac{a^3(x+2)}{(x+1)(y-1)} \times \frac{2x(x+1)(x-1)}{3a^2b} \\ &= \frac{x+2}{6} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)(1-x)(1+x)}{\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{(1+x) + (1-x)}{(1+x) - (1-x)} \\ &= \frac{2}{2x} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{4}{(x+1)+5}}}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{3}{(x+6)+4(x+1)}}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{2}{\frac{(5x+10)+3(x+6)}{5x+10}}} \\ &= \frac{1}{\frac{(8x+28)+2(5x+10)}{8x+28}} \\ &= \frac{8x+28}{18x+48} \\ &= \frac{4x+14}{9x+24} \end{aligned}$$

1.3 解説

多項式の割り算は次のように定義されます。

- 多項式 $A(x)$, $B(x)$ に関して，次のような多項式 $Q(x)$, $R(x)$ がただ一つに定まる。

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \quad (\text{ただし } (R(x) \text{ の次数}) < (B(x) \text{ の次数}))$$

このときの $Q(x)$ を商， $R(x)$ を余りといいます。余りは剰余ともいいます。

これは，整数の割り算と似たような形式になっています。

- 正の整数 a, b に対して、次のような 0 以上の整数 q, r がただ一つに定まる。

$$a = bq + r \quad (\text{ただし } r < b)$$

- (1) 多項式の割り算の筆算は、 x の次数に対して各位を対応させることで、整数の割り算と同じように行なえます。
- (2) 割り算の定義から、 $(\text{割られる式}) = (\text{割る式})(\text{商}) + (\text{余り})$ の形を作ることによって等式を得られます。この等式で未知の部分が2箇所あるため一意には定まりませんが、割られる式が3次式になるためには、商が1次式になる必要があります。解答では商を x としていますが、 $x+1$ や $2x+5$ などと自由に定めてよいです。実際に得られた3次式を $x^2 + x + 2$ で割り算し、余りが $3x+2$ になるかで正しいか確認することができます。
- (3) 約分を行うことで簡単にします。約分を行うために、まず因数分解を行っています。
- (4) 分数の中に分数が入っているものを繁分数といいます。分母と分子に同じ式を掛けるか、 $(\text{分子}) \div (\text{分母})$ の形にすることで繁分数を計算できます。
- (5) 括線の短い分数から順番に計算し、簡単にしていくことができます。

1.4 採点

【第1問 20点】

- (1) 4点
- (2) 4点
- (3) 4点
- (4) 4点
- (5) 4点

2 第2問：恒等式

2.1 問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 次の式が実数 x, y, z についての恒等式であることを証明せよ。

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = -3\{xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x)\}$$

- (2) 次の式が実数 x についての恒等式となるとき、実数 a, b, c の値を求めよ。

$$a(x-1)(x-2) + b(x+1)(x-2) + c(x-1)(x+1) = -4x^2 + 3x + 19$$

- (3) $x^3 + kx^2 + lx + 7$ を $(x+1)^2$ で割ったとき商が $x+m$ 、余りが $2x+1$ であった。このとき、実数 k, l, m の値を求めよ。

- (4) 次の式が実数 x, y についての恒等式となるとき、実数 p, q, r, s の値を求めよ。

$$(x+py-2)(3x+5y+q) = 3x^2 + 14xy + ry^2 + sx - 31y + 14$$

2.2 解答

- (1) 与式の左辺を式変形する。

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + y^3 - 3y^2z + 3yz^2 - z^3 + z^3 - 3z^2x + 3zx^2 - x^3 \\ &= -3x^2y + 3xy^2 - 3y^2z + 3yz^2 - 3z^2x + 3zx^2 \\ &= -3xy(x-y) - 3yz(y-z) - 3zx(z-x) \\ &= -3\{xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x)\} \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

式変形により右辺が得られたため、この式は恒等式である。

- (2) 与式が x についての恒等式であるため、 $x = -1, 1, 2$ のときも成り立つ。それぞれ代入すると、

$$a(-1-1)(-1-2) + 0 + 0 = -4 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 19$$

$$0 + b(1+1)(1-2) + 0 = -4 + 3 + 19$$

$$0 + 0 + c(2-1)(2+1) = -4 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 19$$

となり、それぞれ解いて

$$a = 2, \quad b = -9, \quad c = 3$$

であることが必要である。この値を与式の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= 2(x-1)(x-2) - 9(x+1)(x-2) + 3(x-1)(x+1) \\ &= 2x^2 - 6x + 4 - 9x^2 + 9x + 18 + 3x^2 - 3 \\ &= -4x^2 + 3x + 19 \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

となり、右辺と等しくなるため、この a, b, c の値において与式は恒等式である。

- (3) 与えられた式において、等式

$$x^3 + kx^2 + lx + 7 = (x+1)^2(x+m) + 2x + 1$$

が成り立つ。この右辺を展開すると、

$$x^3 + kx^2 + lx + 7 = x^3 + (m+2)x^2 + (2m+3)x + m+1$$

となる。各項の係数を比較し、

$$\begin{cases} k = m + 2 \\ l = 2m + 3 \\ 7 = m + 1 \end{cases}$$

より

$$k = 8, \quad l = 15, \quad m = 6$$

と定まる。

- (4) 与式の左辺を展開すると

$$3x^2 + (3p+5)xy + 5py^2 + (q-6)x + (pq-10)y - 2q$$

となるため、右辺と係数を比較し

$$\begin{cases} 3p + 5 = 14 \\ 5p = r \\ q - 6 = s \\ pq - 10 = -31 \\ -2q = 14 \end{cases}$$

よりこれを解いた

$$p = 3, \quad q = -7, \quad r = 15, \quad s = -13$$

が求めるべき値である。

2.3 解説

恒等式の証明手順は次のようなものがあります。

- (左辺) - (右辺) を計算し、それが 0 になることを証明する。
- 左辺と右辺をそれぞれ計算し、それらが同じ式になることを証明する。

整式に関する恒等式では、各次の係数が等しいことが条件になります。

- (1) 左辺を計算し、右辺を得られることで恒等式を示しています。
- (2) 実数 x についての恒等式であるため、当然 x に $-1, 1, 2$ を代入しても成り立ちます。これらの値を入れるメリットとしては、 a, b, c のうち 2 つの変数を消去できることにあります。これにより各文字の値を簡潔に求めることができました。ただ、これをもって解答とすることは不十分です。なぜならば、 x が $-1, 1, 2$ で等式が成り立つことしか確認できていないためです。どんな x の値でも成り立つ、すなわち恒等式であることを、式変形で示しました。

- (3) 整式の割り算では、(割られる式) = (商)(割る式) + (余り) という等式が成り立つため、これの係数比較をすることで未知数を求めることができます。
- (4) 左辺を展開して係数比較をしました。4つの未知数に対して4つの式を立式できるため求められます。

2.4 採点

【第2問 20点】

- (1) 5点
- (2) 5点
- (3) 5点
- (4) 5点

3 第3問：等式の証明と式の値

3.1 問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 0でない実数 a, b, c が $a + b + c = 0$ を満たすとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} = 3$$

- (2) 実数 p, q, r が次の式を満たしているとする。

$$p^2 + q^2 + r^2 \neq 0, \quad \frac{p+q}{3} = \frac{q+r}{4} = \frac{r+p}{5}$$

このとき、次の式の値を求めよ。

$$\frac{pq + qr + rp}{p^2 + q^2 + r^2}$$

- (3) 実数 s, t, u が次の式を満たしているとする。

$$s + t + u = 3, \quad st + tu + us = 3$$

このとき、 s, t, u の値はすべて1であることを証明せよ。

- (4) 実数 x, y, z, k が次の式を満たすとき、 k の値を求めよ。

$$xyz \neq 0, \quad \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = \frac{x+y}{z} = k$$

3.2 解答

- (1) $a + b + c = 0$ より $c = -a - b$ である。ここで a, b, c はいずれも0でないから、 $b \neq 0$, $a \neq 0$, $a + b = -c \neq 0$ であり、以下に現れる分母はいずれも0でない。これを与式の左辺に代入すると、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{a^2}{(a+b)\{a+(-a-b)\}} + \frac{b^2}{\{b+(-a-b)\}(b+a)} \\ &\quad + \frac{(-a-b)^2}{\{(-a-b)+a\}\{(-a-b)+b\}} \\ &= -\frac{a^2}{(a+b)b} - \frac{b^2}{(a+b)a} + \frac{(a+b)^2}{ab} \\ &= \frac{-a^3 - b^3 + (a+b)^3}{ab(a+b)} \\ &= \frac{3ab(a+b)}{ab(a+b)} \\ &= 3 \end{aligned}$$

となり、右辺の値と等しくなる。これで等式が証明された。

- (2) 条件

$$p^2 + q^2 + r^2 \neq 0 \tag{3.1}$$

より、いずれかの値は0ではない。

$$\frac{p+q}{3} = \frac{q+r}{4} = \frac{r+p}{5} = k \quad (3.2)$$

とおく。 $k=0$ のとき $p=q=r=0$ となって条件 (3.1) を満たさないため不適となる。よって $k \neq 0$ として考える。(3.2)から

$$p+q=3k, \quad q+r=4k, \quad r+p=5k \quad (3.3)$$

となるため、これらを各辺足して

$$2(p+q+r)=12k$$

より

$$p+q+r=6k$$

となり、(3.3)も合わせて

$$p=2k, \quad q=k, \quad r=3k$$

を得る。これを用いて求めるべき式を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{pq+qr+rp}{p^2+q^2+r^2} &= \frac{2k^2+3k^2+6k^2}{4k^2+k^2+9k^2} \\ &= \frac{11k^2}{14k^2} \\ &= \frac{11}{14} \end{aligned}$$

となる。

(3) $P=(s-1)^2+(t-1)^2+(u-1)^2$ とし、これを式変形すると

$$\begin{aligned} P &= s^2-2s+1+t^2-2t+1+u^2-2u+1 \\ &= s^2+t^2+u^2-2(s+t+u)+3 \end{aligned}$$

となる。さらに

$$(s+t+u)^2 = s^2+t^2+u^2+2(st+tu+us)$$

すなわち

$$s^2+t^2+u^2 = (s+t+u)^2 - 2(st+tu+us)$$

より

$$P = (s+t+u)^2 - 2(st+tu+us) - 2(s+t+u) + 3$$

と変形でき、これに条件 $s+t+u=3$, $st+tu+us=3$ を代入すると

$$P = 3^2 - 2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 3 = 0$$

となる。 $P=(s-1)^2+(t-1)^2+(u-1)^2=0$ より、これは $s=t=u=1$ であることを示している。

(4) 与式より、

$$y+z=kx, \quad z+x=ky, \quad x+y=kz$$

であり、これらを各辺足すと

$$2(x+y+z) = k(x+y+z) \quad (3.4)$$

となる。

(i) $x + y + z = 0$ のとき, $x = -(y + z)$ だから, $k = \frac{y+z}{x} = -\frac{x}{x} = -1$ である。

(ii) $x + y + z \neq 0$ のとき, (3.4)の両辺を $x + y + z$ で割って $k = 2$ を得る。

以上より,

$$\begin{cases} k = -1 & (x + y + z = 0 \text{ のとき}) \\ k = 2 & (x + y + z \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。

3.3 解説

条件が付いた等式の証明や値を求める問題では、与えられた条件をどう使うかが方針の分かれ目になります。代表的には次のような手立てがあります。

- 条件式を用いて、1つの文字を他の文字で表して代入する。
 - 比の形の条件 $\frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$ は、その値を k とおいて各文字を k で表す。
 - $(s + t + u)^2 = s^2 + t^2 + u^2 + 2(st + tu + us)$ のような対称式の利用する。
- (1) 条件 $a + b + c = 0$ から $c = -a - b$ と1文字を消去し、左辺に代入して計算します。分母の $(a + b)$ などが $a + b + c = 0$ を通じて $-c$ や $-a$, $-b$ と書き換えられる点がこの問題の鍵で、通分すると分子に $-a^3 - b^3 + (a + b)^3$ が現れます。これを展開すると $3ab(a + b)$ となり、分母の $ab(a + b)$ と約分できて3が残ります。 a , b , c がいずれも0でないおかげで分母が0にならないことにも触れておくとよいです。
 - (2) 3つの比が等しいという条件なので、共通の値を k とおくのが定石です。すると $p + q$, $q + r$, $r + p$ がそれぞれ k の定数倍で表せます。これら3式を足すと $2(p + q + r)$ が得られ、そこから各文字を k で表せます。条件 $p^2 + q^2 + r^2 \neq 0$ は、 $k = 0$ (すなわち $p = q = r = 0$) を排除するために使います。 $k \neq 0$ なので最後に求める式では k^2 が約分され、 k の値によらず一定の値になります。
 - (3) いきなり $s = t = u = 1$ を示すのは難しいので、 $P = (s - 1)^2 + (t - 1)^2 + (u - 1)^2$ という平方の和を考えるのが上手な発想です。実数の平方の和が0になるのは、各項がすべて0のとき、つまり $s = t = u = 1$ のときに限られます。あとは条件 $s + t + u = 3$, $st + tu + us = 3$ を使って $P = 0$ を示せばよく、ここで対称式の関係 $s^2 + t^2 + u^2 = (s + t + u)^2 - 2(st + tu + us)$ を用いると条件を代入できる形に整います。
 - (4) これも(2)と同様に、等しい比の値を k とおきます。 $y + z = kx$ などを各辺足すと $2(x + y + z) = k(x + y + z)$ が得られますが、ここで $x + y + z$ で割ってよいかどうかを確認する必要があります。 $x + y + z = 0$ の場合と $x + y + z \neq 0$ の場合に分けて考えるのがポイントで、前者では $k = -1$, 後者では $k = 2$ となり、 k の値は1つに定まりません。0で割らないという基本を守ることによって場合分けに気づけます。

3.4 採点

【第3問 20点】

- (1) 5 点
- (2) 5 点
- (3) 5 点
- (4) 5 点

4 第4問：不等式の証明

4.1 問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 実数 a, b が $a > b > 0$ を満たすとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{3a}{a+2} > \frac{3b}{b+2}$$

- (2) 実数 c, d について、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$2c^2 + 5d^2 + 8 \geq 6cd + 4d$$

- (3) 実数 p, q について、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$|p| - |q| \leq |p+q| \leq |p| + |q|$$

- (4) 実数 s, t, x, y について、次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$(s^2 + t^2)(x^2 + y^2) \geq (sx + ty)^2$$

4.2 解答

- (1) 与えられた不等式の左辺から右辺を引いた式 P を考える。

$$\begin{aligned} P &= \frac{3a}{a+2} - \frac{3b}{b+2} \\ &= \frac{3a(b+2) - 3b(a+2)}{(a+2)(b+2)} \\ &= \frac{6(a-b)}{(a+2)(b+2)} \end{aligned}$$

$a > b > 0$ より、 $a-b > 0, a+2 > 0, b+2 > 0$ であるから、 $P > 0$ 、すなわち (左辺) - (右辺) > 0 である。従って、(左辺) $>$ (右辺) が成り立つ。

- (2) 与えられた不等式の左辺から右辺を引いた式 P を考える。

$$\begin{aligned} P &= 2c^2 + 5d^2 + 8 - 6cd - 4d \\ &= 2\left(c - \frac{3}{2}d\right)^2 + \frac{1}{2}d^2 - 4d + 8 \\ &= 2\left(c - \frac{3}{2}d\right)^2 + \frac{1}{2}(d-4)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

よって (左辺) $\geq$ (右辺) である。

- (3) $|p| - |q| = P, |p+q| = Q, |p| + |q| = R$ とおく。常に $Q \geq 0, R \geq 0$ であることに注意する。

- (i) $P \leq Q$ を示す。 $|p| < |q|$ のとき、 $P < 0$ より $P < Q$ である。 $|p| \geq |q|$ のとき、 $P \geq 0$

であるから、平方の差を考えると

$$\begin{aligned} Q^2 - P^2 &= (p+q)^2 - (|p| - |q|)^2 \\ &= p^2 + 2pq + q^2 - p^2 + 2|pq| - q^2 \\ &= 2(pq + |pq|) \end{aligned}$$

となる。これは、 p, q が正、0、負のいずれの値をとっても 0 以上である。よって

$$Q^2 - P^2 \geq 0$$

であり、 $P \geq 0, Q \geq 0$ より $Q \geq P$ である。

(ii) $Q \leq R$ を示す。両辺 0 以上であるから、平方の差を考え

$$\begin{aligned} R^2 - Q^2 &= (|p| + |q|)^2 - (p+q)^2 \\ &= p^2 + 2|pq| + q^2 - p^2 - 2pq - q^2 \\ &= 2(|pq| - pq) \end{aligned}$$

となる。これは、 p, q が正、0、負のいずれの値をとっても 0 以上である。よって

$$R^2 - Q^2 \geq 0$$

であり、 $R \geq 0, Q \geq 0$ より $R \geq Q$ である。

以上より、 $P \leq Q \leq R$ となり、題意の不等式は示された。

(4) 左辺から右辺を引いた式 P を考えると、

$$\begin{aligned} P &= (s^2 + t^2)(x^2 + y^2) - (sx + ty)^2 \\ &= s^2x^2 + s^2y^2 + t^2x^2 + t^2y^2 - s^2x^2 - 2stxy - t^2y^2 \\ &= s^2y^2 - 2stxy + t^2x^2 \\ &= (sy - tx)^2 \end{aligned}$$

となり、常に $P \geq 0$ が成り立つ。よって (左辺) $\geq$ (右辺) が成り立つ。

4.3 解説

不等式 $A \geq B$ (または $A > B$) を証明する基本方針は次の通りです。

- $A - B$ を計算し、それが 0 以上 (または正) であることを示す。多くの場合、平方の和や $(\dots)^2$ の形に整理します。
- 両辺がともに 0 以上のときは、 $A^2 - B^2 \geq 0$ を示してもよい。 $A \geq 0, B \geq 0$ のもとでは $A^2 \geq B^2$ と $A \geq B$ が同値になります。

実数の平方は必ず 0 以上である、という事実がほとんどの証明の土台になります。

- (1) 左辺から右辺を引いて通分すると、分子が $6(a-b)$ 、分母が $(a+2)(b+2)$ の分数になります。条件 $a > b > 0$ から、 $a-b > 0, a+2 > 0, b+2 > 0$ がいえるので、差が正であると結論できます。差を作って符号を確かめるという流れの練習になります。
- (2) 左辺から右辺を引いた式を平方の和の形にまとめるのが目標です。まず c について平方完成し $2\left(c - \frac{3}{2}d\right)^2$ を作り、残った d の部分をさらに平方完成すると $\frac{1}{2}(d-4)^2$ が現れます。2 つ

の平方の和になるので0以上と分かります。どの文字から平方完成するか迷ったら、係数の扱いやすい文字を選ぶとよいです。

- (3) 絶対値を含む不等式で、 $|p| - |q| \leq |p + q|$ と $|p + q| \leq |p| + |q|$ の2つを別々に示します。絶対値は直接扱いにくいので、両辺が0以上であることを確認したうえで平方の差を考えるのが有効です。計算の途中で $|pq|$ と pq の大小（常に $|pq| \geq pq$, $|pq| \geq -pq$ ）を使う点に注意してください。なお左側の $|p| - |q|$ が負になる場合は、右辺が0以上なので平方を取るまでもなく成り立ちます。この2つの不等式はまとめて三角不等式と呼ばれ、よく登場します。
- (4) 左辺から右辺を引くと、展開して整理した結果が $(sy - tx)^2$ という完全平方になり、0以上であることが分かります。この不等式はコーシー・シュワルツの不等式と呼ばれる有名なもので、等号は $sy = tx$ のとき、すなわち (s, t) と (x, y) が比例するときに成り立ちます。

4.4 採点

【第4問 20点】

- (1) 5点
(2) 5点
(3) 5点
(4) 5点

5 第5問：相加平均と相乗平均

5.1 問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 実数 a, b が $a > 0, b > 0$ を満たすとき、次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか述べよ。

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

- (2) 実数 x が $x > 0$ の範囲を動くとき、 $x + \frac{1}{x}$ のとる最小値を求めよ。
- (3) 実数 k が $k > 0$ の範囲を動くとき、 $k + \frac{2}{k+1}$ のとる最小値を求めよ。
- (4) 実数 s, t が

$$s > 0, \quad t > 0, \quad s + t = 1$$

を満たすとき、 $\frac{4}{s} + \frac{9}{t}$ のとる最小値を求めよ。

5.2 解答

- (1) 左辺の平方から右辺の平方を引くと

$$\begin{aligned} (\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - (\sqrt{ab})^2 \\ &= \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4} \\ &= \frac{(a-b)^2}{4} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となり、 $(\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 \geq 0$ である。与式の両辺はともに正であるから、 $(\text{左辺}) \geq (\text{右辺})$ が成り立つ。等号が成立するのは $a - b = 0$ すなわち $a = b$ のときである。

- (2) (1) より、

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

である。等号成立条件は $x = \frac{1}{x}$ すなわち $x = 1$ のときである。よって $x + \frac{1}{x}$ の最小値は 2 である。

- (3) 与式を $E = (k+1) + \frac{2}{k+1} - 1 = F - 1$ と変形する。(1) より、

$$F = (k+1) + \frac{2}{k+1} \geq 2\sqrt{(k+1) \cdot \frac{2}{k+1}} = 2\sqrt{2}$$

で、等号は $k+1 = \frac{2}{k+1}$ すなわち $(k+1)^2 = 2$ より $k = \sqrt{2} - 1$ のときに成立する。この

とき $F = 2\sqrt{2}$ で、求めるべき最小値は

$$E = F - 1 = 2\sqrt{2} - 1$$

である。

- (4) 値を求めたい式を E とおく。

$$\begin{aligned} E &= 1 \cdot \left(\frac{4}{s} + \frac{9}{t} \right) \\ &= (s+t) \left(\frac{4}{s} + \frac{9}{t} \right) \\ &= 4 + \frac{9s}{t} + \frac{4t}{s} + 9 \end{aligned}$$

ところで、(1) より、

$$\frac{9s}{t} + \frac{4t}{s} \geq 2\sqrt{\frac{9s}{t} \cdot \frac{4t}{s}} = 12$$

である。等号は $\frac{9s}{t} = \frac{4t}{s}$ のとき、すなわち $9s^2 = 4t^2$ より $3s = 2t$ (なぜならば $s > 0$, $t > 0$)、また $s+t=1$ より $s = \frac{2}{5}$, $t = \frac{3}{5}$ のときに成り立つ。このときの E の最小値は

$$E = 4 + 12 + 9 = 25$$

である。

5.3 解説

この大問では相加平均と相乗平均の大小関係を扱います。

- $a > 0$, $b > 0$ のとき、 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ が成り立つ。等号成立は $a = b$ のとき。

これを使うときに大切なのは、適用する2つの数がともに正であること、そして最小値を求める問題では等号が実際に成立する（等号成立条件を満たす値が範囲内に存在する）ことを必ず確認する点です。等号が成立しなければ、その値は「下限」ではあっても「最小値」とは言えません。

- (1) 相加相乗平均の不等式そのものの証明です。両辺とも正なので、左辺の平方から右辺の平方を引くと $\frac{(a-b)^2}{4}$ となり0以上であることが分かります。等号が成り立つのは $a = b$ のときで、この等号成立条件は以降の小問で最小値を求める際に繰り返し使うので、しっかり押さえておきましょう。
- (2) x と $\frac{1}{x}$ はともに正で、その積が $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ と定数になるのがポイントです。積が一定なので相加相乗平均が有効に働き、最小値2が得られます。等号成立条件 $x = \frac{1}{x}$ から $x = 1$ がきちんと $x > 0$ の範囲にあることを確認します。
- (3) そのまま相加相乗平均を使おうとすると積が定数になりません。そこで $k + \frac{2}{k+1} = (k+1) + \frac{2}{k+1} - 1$ と変形し、 $(k+1)$ と $\frac{2}{k+1}$ の積が2で一定になるように整えるのが工夫です。積が定数になる形を自分で作り出す、という発想が要点です。最後に -1 を忘れずに戻します。
- (4) 条件 $s+t=1$ を1として式に掛け、 $(s+t) \left(\frac{4}{s} + \frac{9}{t} \right)$ と展開するのが定石の手法です。展開

すると定数項と $\frac{9s}{t} + \frac{4t}{s}$ の和になり，後者は積が $\frac{9s}{t} \cdot \frac{4t}{s} = 36$ と一定なので相加相乗平均が使えます。等号成立条件 $\frac{9s}{t} = \frac{4t}{s}$ と条件 $s + t = 1$ を連立して，最小値を与える s, t が範囲内にあることまで確認しましょう。

5.4 採点

【第5問 20点】

- (1) 5点
- (2) 5点
- (3) 5点
- (4) 5点