

確認試験問題

整数

(配点 100点)

(日付) _____ 年 _____ 月 _____ 日

(開始)

--	--	--	--	--

 :

--	--	--	--

 ~ (90分) ~

--	--	--	--	--

 (終了)

注意事項

1. 上の日付の欄に、試験を行う日付を記入しなさい。
2. 上の開始と終了の欄に、試験開始予定の時刻とその90分後の時刻を、それぞれ記入しなさい。試験はその時間内に行われます。
3. 試験に関係の無い物の持ち込みは、原則として認められません。
4. 試験時間中は、アラーム機能以外での電子機器の使用は認められません。
5. 試験開始の時刻になるまで、この試験の問題を見てはいけません。
6. この問題冊子は全部で7ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があれば、監督者に知らせなさい。
7. この試験は6問で構成されています。解答用紙は第1問から第6問までに対応するものを用意しなさい。
8. 解答には、黒色鉛筆か、または黒色シャープペンシルを使用しなさい。
9. 解答用紙の指定欄に、試験名、氏名、学生番号を記入しなさい。
10. 問題ごとに、解答欄が指定されています。解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
11. 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
12. この問題冊子の余白は、書き込みに関しては自由に使用してもよいが、どのページも破棄してはいけません。
13. 試験時間中は、やむを得ない場合を除き、退場してはいけません。
14. 試験後は、問題用紙と解答用紙を自由に活用しなさい。

第 1 問

(配点 12)

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) $\frac{47685}{117623}$ を既約分数で表せ。
- (2) 249951 を素因数分解せよ。
- (3) 227^{495} の 1 の位の数を求めよ。
- (4) 2000! の末尾には何個の 0 が並ぶか答えよ。

第 2 問

(配点 18)

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, $a \leq b \leq c$ を満たす自然数 a, b, c の組 (a, b, c) をすべて求めよ。
- (2) $ab = 3a - 2b + 15$ を満たす整数 a, b の組 (a, b) をすべて求めよ。
- (3) $7^p + 99 = q^2$ を満たす整数 p, q の組 (p, q) をすべて求めよ。

第 3 問

(配点 21)

問い A, B に答えよ。

A

2 以上の自然数 n について, $1 \leq k < n$ を満たす整数 k それぞれについて二項係数 ${}_n C_k$ を考え, そうして得られた $n-1$ 個の数

$${}_n C_1, {}_n C_2, \dots, {}_n C_{n-1}$$

の最大公約数を $g(n)$ とする。例えば, ${}_3 C_1 = {}_3 C_2 = 3$ より $g(3) = 3$ である。

以下の問いに答えよ。必要ならば, 二項係数 ${}_n C_k$ が整数であることを用いてよい。

- (1) 素数 p について, $g(p) = p$ であることを示せ。
- (2) 相異なる素数 p, q について, $g(pq) = 1$ であることを示せ。

B

自然数 k に対して, ${}_{447} C_m$ が k の倍数であるような 446 以下の自然数 m のうち, 最小である m を $f(k)$ とする。 k の倍数であるものが無いならば, $f(k) = 0$ とする。例えば, ${}_{447} C_1 = 447 = 3 \cdot 149$ より, $f(3) = f(149) = f(447) = 1$ である。このとき, 3 つの値 $f(2), f(4), f(8)$ を求めよ。

第 4 問

(配点 12)

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) $\sqrt{m^2 + 4m + 24}$ が整数となるような整数 m をすべて求めよ。
- (2) $\frac{8n - 16}{2n^2 + 3n + 2}$ が整数となるような整数 n をすべて求めよ。

第 5 問

(配点 15)

x と y は整数とし, 方程式

$$11x + 7y = 1 \quad \dots\dots (*)$$

を考える。

- (1) 方程式 (*) を満たす x, y の組 (x, y) を 1 つ挙げよ。
- (2) 方程式 (*) の一般解を求めよ。
- (3) $0 \leq x \leq 100, -100 \leq y \leq 0$ の範囲で, 方程式 (*) を満たす x, y の組 (x, y) はいくつあるか求めよ。

第 6 問

(配点 22)

自然数 a, b, c が, 等式

$$a^2 + b^2 = c^2$$

を満たしている。

- (1) 自然数の平方を 3 で割った余りは 0 または 1 であることを示せ。
- (2) 自然数の平方を 4 で割った余りは 0 または 1 であることを示せ。
- (3) a, b, c のいずれかは 3 の倍数であることを示せ。
- (4) a, b, c のいずれかは 5 の倍数であることを示せ。
- (5) a, b のいずれかは偶数であることを示せ。
- (6) ab は 12 の倍数であることを示せ。