確 認 試 験 問 題
整 数

解 答 例 ・ 解 説

試験時間： 90 分

問題数： 6 問

配点： 100 点

最終改訂日：2026/04/21

1　第 1 問：倍数と約数

1.1　問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

(1) $\dfrac{47685}{117623}$ を既約分数で表せ。

(2) 249951 を素因数分解せよ。

(3) 227^{495} の 1 の位の数を求めよ。

(4) 2000! の末尾には何個の 0 が並ぶか答えよ。

1.2　解答

(1) ユークリッドの互除法で，分母 a と分子 b の最大公約数 $g(a,b)$ を求める。

$$\begin{aligned} g(117623, 47685) &= g(47685 \cdot 2 + 22253, 47685) \\ &= g(47685, 22253) \\ &= g(22253 \cdot 2 + 3179, 22253) \\ &= g(22253, 3179) \\ &= g(3179 \cdot 7, 3179) \\ &= 3179 \end{aligned}$$

よって，与えられた分数を約分すると

$$\frac{47685}{117623} = \frac{15 \cdot 3179}{37 \cdot 3179} = \frac{15}{37}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} 249951 &= 250000 - 49 \\ &= 500^2 - 7^2 \\ &= (500+7)(500-7) \\ &= 507 \cdot 493 \\ &= 3 \cdot 169 \cdot 17 \cdot 29 \\ &= 3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 29 \end{aligned}$$

(3) 227^{495} の 1 の位の数と，7^{495} の 1 の位の数は等しい。10 を法として，

$$7^1 \equiv 7, \quad 7^2 \equiv 9, \quad 7^3 \equiv 3, \quad 7^4 \equiv 1, \quad 7^5 \equiv 7, \quad \ldots$$

より，7^n $(n = 1, 2, \ldots)$ を 10 で割った余りは 7，9，3，1 を繰り返す。よって $7^{495} = 7^{4 \cdot 123 + 3}$ を 10 で割った余り，すなわち 1 の位の数は 3 である。したがって 227^{495} の 1 の位の数は 3 である。

(4) 自然数 n の末尾に 0 が並ぶ個数は，n を 10 で割れる回数で，それは n を 2 で割れる回数と 5 で割れる回数のうち少ない方の数である。2000! は 1 から 2000 までの積で，明らかに 5 で割

り切れる回数の方が少ないから，この回数を考える。1 から 2000 の整数のうち，5 の倍数は

$$5\cdot 1,\quad 5\cdot 2,\quad \ldots,\quad 5\cdot 400$$

があり，400 個ある。まずこれらから素因数 5 を 1 つずつ，400 個取れる。25 の倍数は

$$25\cdot 1,\quad 25\cdot 2,\quad \ldots,\quad 25\cdot 80$$

があり，80 個ある。これらから更に素因数 5 を 1 つずつ，80 個取れる。125 の倍数は

$$125\cdot 1,\quad 125\cdot 2,\quad \ldots,\quad 125\cdot 16$$

があり，16 個ある。これらから更に素因数 5 を 1 つずつ，16 個取れる。625 の倍数は

$$625\cdot 1,\quad 625\cdot 2,\quad 625\cdot 3$$

があり，3 個ある。これらから更に素因数 5 を 1 つずつ，3 個取れる。よって 2000! は 5 で最大 $400+80+16+3=499$ 回割り切れる。この 499 が，2000! の末尾に並ぶ 0 の個数である。

1.3　解説

(1)　自然数 a，b について，a を b で割った余りを r とすると，a と b の最大公約数は b と r の最大公約数と等しいという性質が成り立ちます。これを用いて 2 つの自然数の最大公約数を求める次のアルゴリズムをユークリッドの互除法といいます。

(i)　2 数のうち小さくない方を a，もう一方を b とする。

(ii)　b が 0 ならば a を出力としてアルゴリズムを終了する。

(iii)　a を b で割った余りを r とする。

(iv)　b を新たに a に，r を新たに b として (ii) 以降を繰り返す。

大きい公約数を求めるためにユークリッドの互除法を使い，約分を実行します。

(2)　そのまま割り算を用いてもよいですが，和と差の積の因数分解で工夫しました。

(3)　10 を法として，$227\equiv 7$ であるため，$227^{495}\equiv 7^{495}$ となります。

(4)　1 から 2000 までの自然数の中に素因数 5 が何個含まれているかを数えるイメージを下の図に示しました。自然数に含まれている素因数 5 の数だけ縦に 5 を並べ，上から 1 段目，2 段目，... というようにします。ここに並んだ 5 の数が 2000! に含まれる素因数 5 の数であるためこれを数えます。まず 5 の倍数には 1 段目に 5 が書かれているため，1 段目にある 5 の個数は 5 の倍数の個数です。次に $5^2=25$ の倍数には 2 段目にも 5 が書かれているため，2 段目にある 5 の個数は 25 の倍数の個数です。同様のことを 3 段目の $5^3=125$ の倍数，4 段目の $5^4=625$ の倍数と数えていくと，解答のような数え方になります。

1	2	3	4	5	⋯	10	⋯	25	⋯	125	⋯	625	⋯
				5		5		5		5		5	
								5		5		5	
										5		5	
												5	

1.4　採点

【第 1 問　12 点】

結論が正しければ，議論が不十分でも構わない。結論が正しくない場合でも，議論によっては部分点を与える。

(1)　3 点

(2)　3 点

(3)　3 点

(4)　3 点

2　第 2 問：方程式を満たす整数の組

2.1　問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

(1)　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$，$a \leqq b \leqq c$ を満たす自然数 a，b，c の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

(2)　$ab=3a-2b+15$ を満たす整数 a，b の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(3)　$7^p+99=q^2$ を満たす整数 p，q の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。

2.2　解答

(1)　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=E$ とおく。$a=1$ の場合を考えると，

$$E=\frac{1}{1}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$$

となり，等式を満たさない。$a \geqq 4$ の場合を考えると，

$$E \leqq \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}<1$$

となり，これも等式を満たさない。よって $a=2$ または $a=3$ である。

(i)　$a=2$ のときを考える。$b \geqq 5$ のとき，

$$E \leqq \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}<1$$

となり，等式を満たさない。また，$b=2$ のとき，

$$E=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{c}>1$$

となり，等式を満たさない。よって $b=3$ または $b=4$ である。

(a)　$b=3$ のとき，

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{c}=1$$

を解いて $c=6$ である。

(b)　$b=4$ のとき，

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{c}=1$$

を解いて $c=4$ である。

よって，$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 6)$，$(a,\ b,\ c)=(2,\ 4,\ 4)$ が条件を満たす。

(ii)　$a=3$ のときを考える。このとき E の最大値は，$b=3$，$c=3$ のときの

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$$

で，それ以外の場合は $E<1$ となる。よって $(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 3)$ が条件を満たす。

以上より，条件を満たす a，b，c の組 $(a,\ b,\ c)$ は

$$(2,\ 3,\ 6),\quad (2,\ 4,\ 4),\quad (3,\ 3,\ 3)$$

である。

(2)　与式を整理して

$$(a+2)(b-3)=9$$

である。$a+2,\ b-3$ はともに整数である。これらの積が 9 であるから，考えられる組み合わせとして，

$$a+2=1,\quad b-3=9$$
$$a+2=3,\quad b-3=3$$
$$a+2=9,\quad b-3=1$$
$$a+2=-1,\quad b-3=-9$$
$$a+2=-3,\quad b-3=-3$$
$$a+2=-9,\quad b-3=-1$$

がある。これらを全て解くと，条件を満たす $a,\ b$ の組 $(a,\ b)$ が

$$(-1,\ 12),\quad (1,\ 6),\quad (7,\ 4),\quad (-3,\ -6),\quad (-5,\ 0),\quad (-11,\ 2)$$

であることが分かる。

(3)　与式を E とおく。

(i)　$p<0$ のとき，E のうち 7^p のみ整数ではなくなるから，E を満たさない。

(ii)　$p=0$ のとき，E は $7^0+99=q^2$ となり，これを解いて $q=\pm 10$ である。

(iii)　$p>0$ のときを考える。4 を法とした合同式を E の各項について考える。

$$7^p \equiv (-1)^p = \begin{cases} -1 & (p\text{: 奇数}) \\ 1 & (p\text{: 偶数}) \end{cases},\quad 99\equiv 3,\quad q^2 \equiv \begin{cases} 1 & (q\text{: 奇数}) \\ 0 & (q\text{: 偶数}) \end{cases}$$

E の両辺をそれぞれ 4 で割った余りが等しくなるために，$p,\ q$ が共に偶数であることが必要である。$p=2r$（r は正の整数）とおいて，E を次のように変形する。

$$(q+7^r)(q-7^r)=99$$

左辺の因数は共に整数であり，$q+7^r>q-7^r$ であることに注意すると，それらの積が 99 になる組み合わせとして次のようなものが考えられる。

$q+7^r$	99	33	11	-1	-3	-9
$q-7^r$	1	3	9	-99	-33	-11

上から下を引くことで

$2\cdot 7^r$	98	30	2	98	30	2

を得る。この表の中で $2\cdot 7^r$ がとり得る値は 98 のみで，そのとき $r=2$ である。よって $p=2\cdot 2=4$ となり，E に代入すると

$$7^4+99=q^2$$

より $q=\pm 50$ が得られる。

以上より，与式を満たす $p,\ q$ の組 $(p,\ q)$ は

$$(0,\ 10),\quad (0,\ -10),\quad (4,\ 50),\quad (4,\ -50)$$

である。

2.3　解説

整数問題の基本的な解き方は次の手法があります。

- 掛け算の形を考える。
- 割り算の余りを考える。
- 不等式で範囲を絞る。

(1)　不等式で範囲を絞っています。

(2)　因数分解し，整数の掛け算の形に持ちこんでいます。

(3)　割り算の余りを考えることでパターンを絞っています。因数分解の際に和と差の積の形を作る問題はよくあります。

2.4　採点

【第 2 問　18 点】

議論の要所で部分点を与える。

(1)　6 点

(2)　6 点

(3)　6 点

3　第 3 問：二項係数

3.1　問題

問い A，B に答えよ。

A

2 以上の自然数 n について，$1 \leqq k < n$ を満たす整数 k それぞれについて二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k$ を考え，そうして得られた $n-1$ 個の数

$${}_n\mathrm{C}_1, \quad {}_n\mathrm{C}_2, \quad \cdots\cdots, \quad {}_n\mathrm{C}_{n-1}$$

の最大公約数を $g(n)$ とする。例えば，${}_3\mathrm{C}_1 = {}_3\mathrm{C}_2 = 3$ より $g(3) = 3$ である。

以下の問いに答えよ。必要ならば，二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k$ が整数であることを用いてよい。

(1)　素数 p について，$g(p) = p$ であることを示せ。

(2)　相異なる素数 p，q について，$g(pq) = 1$ であることを示せ。

B

自然数 k に対して，${}_{447}\mathrm{C}_m$ が k の倍数であるような 446 以下の自然数 m のうち，最小である m を $f(k)$ とする。k の倍数であるものが無いならば，$f(k) = 0$ とする。例えば，${}_{447}\mathrm{C}_1 = 447 = 3 \cdot 149$ より，$f(3) = f(149) = f(447) = 1$ である。このとき，3 つの値 $f(2)$，$f(4)$，$f(8)$ を求めよ。

3.2　解答

A

(1)　$1 \leqq k < p$ で考える。${}_p\mathrm{C}_k = \dfrac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$ について，分母の k，$k-1$，…，1 はいずれも p より小さく，また p が素数であることより，p と互いに素である。よって，分子の p は約分されずに残る。また，${}_p\mathrm{C}_k$ は整数である。ゆえに ${}_p\mathrm{C}_k$ は p の倍数であるから，

$${}_p\mathrm{C}_1, \quad {}_p\mathrm{C}_2, \quad \ldots, \quad {}_p\mathrm{C}_{p-1}$$

は p を公約数に持つ。また，${}_p\mathrm{C}_1 = p$ より，p より大きい公約数は持たない。従って，$g(p) = p$ である。

(2)　${}_{pq}\mathrm{C}_1 = pq$ により，$g(pq)$ として考えられるものは 1，p，q，pq である。ところで，

$${}_{pq}\mathrm{C}_p = \frac{(pq)(pq-1)\cdots(pq-p+1)}{p(p-1)\cdots 1}$$

について考えると，この分数の分子の因数 pq，$pq-1$，…，$pq-p+1$ の中で，p の倍数であるものは pq のみである。よって分子の p は分母の p と約分され，分子から素因数 p は無くなる。よって ${}_{pq}\mathrm{C}_p$ は p の倍数ではない。同様に考え，

$${}_{pq}\mathrm{C}_q = \frac{(pq)(pq-1)\cdots(pq-q+1)}{q(q-1)\cdots 1}$$

は q の倍数ではない。

以上より $g(pq)=1$ であると結論付けられる。

B

二項係数の性質より，

$$ {}_{447}\mathrm{C}_m = {}_{447}\mathrm{C}_{447-m} $$

である。$m \geqq 224$ のとき，${}_{447}\mathrm{C}_m$ がある整数 A の倍数であっても，m より小さい $447-m$ について，${}_{447}\mathrm{C}_{447-m}$ は A の倍数となるため，${}_{447}\mathrm{C}_m$ が A の倍数となる m で最小とはならない。よって，${}_{447}\mathrm{C}_m$ が何の倍数であるかは，$m<224$ で考えればよい。

${}_{447}\mathrm{C}_r$ を $r=1,2,\ldots$ として順番に考え，${}_{447}\mathrm{C}_{r-1}$ と ${}_{447}\mathrm{C}_r$ との関係を見ると次の通り。

$$ \begin{aligned} {}_{447}\mathrm{C}_1 &= \frac{447}{1} \\ {}_{447}\mathrm{C}_2 &= \frac{447\cdot 446}{2\cdot 1} = \frac{447}{1}\cdot\frac{446}{2} = {}_{447}\mathrm{C}_1\cdot\frac{446}{2} \\ &\ \vdots \\ {}_{447}\mathrm{C}_r &= \frac{447\cdot 446\cdot\cdots\cdot(448-(r-1))\cdot(448-r)}{r\cdot(r-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1} \\ &= \frac{447\cdot 446\cdot\cdots\cdot(448-(r-1))}{(r-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{448-r}{r} \\ &= {}_{447}\mathrm{C}_{r-1}\cdot\frac{448-r}{r} \end{aligned} $$

以下では，${}_{447}\mathrm{C}_{r-1}$ に $\dfrac{448-r}{r}$ を掛けて ${}_{447}\mathrm{C}_r$ を考えるとき，$m=r$ に進めると表現する。

2，4，8 の倍数になる ${}_{447}\mathrm{C}_m$ を考えるため，2 の素因数の個数について考える。

- ${}_{447}\mathrm{C}_1 = 447$ は素因数 2 を持たない。
- $m=2$ に進めると，$\dfrac{446}{2}=223$ が掛けられるが，これも素因数 2 を持たない。以下同様に進める。
- $m=r$ に進めるとき，掛けられる $\dfrac{448-r}{r}$ の分子と分母が素因数 2 を何個含むか考える。r を素因数 2 と他に分けるように $r=2^a\cdot b$（a は 0 以上の整数，b は奇数）とおくと，

$$ \frac{448-r}{r} = \frac{2^6\cdot 7-2^a\cdot b}{2^a\cdot b} = \frac{2^{6-a}\cdot 7-b}{b} $$

と表される。$a<6$ のときは，この式は $\dfrac{\text{偶数}-\text{奇数}}{\text{奇数}}$ の形となり，分母にも分子にも素因数 2 が現れないため，その r について $m=r$ に進めても素因数 2 の個数が変わらない。そのため $a \geqq 6$ について考える。このような数は $r<224$ の範囲で

$$ 2^6\cdot 1,\quad 2^6\cdot 2,\quad 2^6\cdot 3 $$

がある。それぞれについて考える。

(i)　$m=r=2^6\cdot 1$ に進めると，

$$ \frac{448-r}{r} = \frac{2^{6-6}\cdot 7-1}{1} = 6 $$

が掛けられ，素因数 2 が 1 個発生する。これより，$f(2)=2^6\cdot 1=64$ であることが分かる。

(ii)　$m = r = 2^6 \cdot 2$ に進めると，

$$\frac{448 - r}{r} = \frac{2^{6-6} \cdot 7 - 2}{2} = \frac{5}{2}$$

が掛けられ，素因数 2 が 1 個減り，0 個になる。

(iii)　$m = r = 2^6 \cdot 3$ に進めると，

$$\frac{448 - r}{r} = \frac{2^{6-6} \cdot 7 - 3}{3} = \frac{4}{3}$$

が掛けられ，素因数 2 が 2 個増え，2 個になる。これより，$f(4) = 2^6 \cdot 3 = 192$ であることが分かる。

これ以上は素因数 2 は増えないから，${}_{447}\mathrm{C}_m$ $(m = 1, 2, \ldots, 223)$ が 8 の倍数となることはない。

以上より，求めるべき値は次の通りである。

$f(2) = 64,\quad f(4) = 192,\quad f(8) = 0$

3.3　解説

二項係数の問題です。

3.4　採点

【第 3 問　21 点】

議論の要所で部分点を適宜与える。

A (1)　6 点

(2)　6 点

B　9 点

4　第 4 問：式が整数となる条件

4.1　問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

(1)　$\sqrt{m^2+4m+24}$ が整数となるような整数 m をすべて求めよ。

(2)　$\dfrac{8n-16}{2n^2+3n+2}$ が整数となるような整数 n をすべて求めよ。

4.2　解答

(1)　整数 k を用いて，$\sqrt{m^2+4m+24}=k$ が成り立つような m を考える。この左辺は 0 以上であるから，k も 0 以上である。両辺を 2 乗して

$$m^2+4m+24=k^2$$

すなわち

$$(k+m+2)(k-m-2)=20$$

を満たす k, m を調べる。$k+m+2$ と $k-m-2$ はともに整数であるため，その積が 20 となる組み合わせは次のものが考えられる。また，$k+m+2$ から $k-m-2$ を引いた値 $2m+4$ も表に示した。

$k+m+2$	20	10	5	4	2	1	-1	-2	-4	-5	-10	-20
$k-m-2$	1	2	4	5	10	20	-20	-10	-5	-4	-2	-1
$2m+4$	19	8	1	-1	-8	-19	21	8	1	-1	-8	-19

$2m+4$ は偶数であるから，この表の中でとりうる値は 8 と -8 のみ。よって対応する列の値を比較し，

$$2m+4=8,\quad k+m+2=10$$
$$2m+4=-8,\quad k+m+2=2$$
$$2m+4=8,\quad k+m+2=-2$$
$$2m+4=-8,\quad k+m+2=-10$$

の場合について，それぞれ解くと次のようになる。

$$m=2,\quad k=6$$
$$m=-6,\quad k=6$$
$$m=2,\quad k=-6$$
$$m=-6,\quad k=-6$$

このうち，$k \geqq 0$ であるものは前者 2 つのみである。従って，条件を満たす m は

$$m=2,\quad m=-6$$

である。

(2)　与式の分子を A，分母を B とおき，与式を $\dfrac{A}{B}$ で表す。

$$B=2\left(n+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$$

より，常に $B > 0$ であることが分かる。

(i)　$n > 2$ のとき，$A > 0$ である。

$$B - A = 2n^2 - 5n + 18 = 2\left(n - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{119}{8} > 0$$

より $B > A$ ゆえ，$0 < \dfrac{A}{B} < 1$ であるため，与式が整数となることはない。

(ii)　$n = 2$ のとき，$A = 0$ であり，与式は整数値 0 である。

(iii)　$n < 2$ のとき，$A < 0$ である。$-7 < n < 2$ について与式の値を調べると次の通り。

n	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
(与式)	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{56}{37}$	$-\frac{24}{11}$	$-\frac{40}{11}$	-8	-24	-8	$-\frac{8}{7}$

また，

$$|B| - |A| = 2n^2 + 3n + 2 - (-8n + 16) = 2n^2 + 11n - 14 = (n + 7)(2n - 3) + 7$$

は $n \leqq -7$ において正であるから，この範囲で $|B| > |A|$ ゆえ $1 > \left|\dfrac{A}{B}\right|$ であり，$A < 0$ であることも含めると

$$-1 < \frac{A}{B} < 0$$

となる。この場合，与式が整数となることはない。

以上より，題意を満たす n は

$$n = -2,\quad -1,\quad 0,\quad 2$$

である。

4.3　解説

第 2 問に引き続き，整数問題の基本的な解き方

- 掛け算の形を考える
- 割り算の余りを考える
- 不等式で範囲を絞る

を用います。

(1)　与式を文字でおいて，式変形で整数の積の形に変形しています。

(2)　分子が 1 次式，分母が 2 次式であるため，n の絶対値が大きくなると分母の絶対値が分子のそれに対して大きくなり，整数にはならなくなると考えます。$n < 2$ のときは与式は負の数となりますが，$n \leqq -7$ と $-7 < n < 2$ について分けているのは次のためです。

- $|B| - |A| = B + A = 2n^2 + 11n - 14$ が正であれば $-1 < \dfrac{A}{B} < 0$ がいえ，この範囲では与式は整数とならないといえる。座標平面上で $y = 2x^2 + 11x - 14$ を考えると，この曲線は x 軸と $-7 < x < -6$ の範囲で交わっていることが（値を代入すると）分かるため，$|B| - |A|$ は $n \leqq -7$ において正になる，だから $2n^2 + 11n - 14$ を $n + 7$ で割って

$$2n^2 + 11n - 14 = (n + 7)(2n - 3) + 7$$

と式変形し，$n \leqq -7$ においてこの右辺は正になると主張するとよい。

4.4　採点

【第 4 問　12 点】

議論の内容によっては部分点を与える。

(1)　6 点

(2)　6 点

5　第 5 問：不定方程式

5.1　問題

x と y は整数とし，方程式

$$11x + 7y = 1 \qquad \cdots\cdots (*)$$

を考える。

(1)　方程式 $(*)$ を満たす x，y の組 $(x,\ y)$ を 1 つ挙げよ。

(2)　方程式 $(*)$ の一般解を求めよ。

(3)　$0 \leqq x \leqq 100$，$-100 \leqq y \leqq 0$ の範囲で，方程式 $(*)$ を満たす x，y の組 $(x,\ y)$ はいくつあるか求めよ。

5.2　解答

(1)　$(x,\ y) = (2,\ -3)$ が方程式 $(*)$ の 1 つの解である。

(2)　(1) より，

$$11 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) = 1 \tag{5.1}$$

である。方程式 $(*)$ と等式 (5.1)の各辺を引き算すると次の等式が得られる。

$$11(x-2) + 7 \cdot (y+3) = 0$$

一部を移項すると次のようになる。

$$11(x-2) = -7 \cdot (y+3)$$

11 と 7 は互いに素であるから，整数 m を用いて

$$x - 2 = 7m, \quad y + 3 = -11m$$

と表せる。ゆえに，方程式の一般解は

$$(x,\ y) = (7m+2,\ -11m-3) \quad (m \text{ は整数})$$

である。

(3)　(2) で得られた一般解の m に，$-100 \leqq y \leqq 0$ を満たすように値を代入する。$m = 0, 1, \ldots, 8$ を代入すると，$(x,\ y)$ は

$$(2,\ -3),\quad (9,\ -14),\quad (16,\ -25),\quad (23,\ -36),\quad (30,\ -47),$$
$$(37,\ -58),\quad (44,\ -69),\quad (51,\ -80),\quad (58,\ -91)$$

となり，この組にある x の値は全て $0 \leqq x \leqq 100$ を満たす。従って，与えられた x，y の範囲で方程式を満たす組 $(x,\ y)$ は 9 個ある。

5.3　解説

未知数の数が式の数より多く，解が一意に定まらない方程式を不定方程式といいます。今回は不定方程式の整数解を求めています。不定方程式の具体的な 1 つの解を特殊解，パラメーターを用いてす

べての解を表したものを一般解といいます。

本問の方程式では，(1) で絶対値の小さめな解が存在するため，実際に値を代入する実験でも 1 つの解を比較的容易に求められます。ただ，絶対値の大きめな解しか存在しない $ax+by=1$（a，b は互いに素）の形の方程式は，次のようにユークリッドの互除法を用いて次のように求めることができます。

- 方程式 $92x+49y=1$ の整数解を求めたい。92 と 49 は互いに素であるため，この方程式に解は存在する。
- 割り算を繰り返し，余りが 1 になるまで行う。
  - $92=49\cdot1+43$
  - $49=43\cdot1+6$
  - $43=6\cdot7+1$
- 割り算を行って得られた等式を式変形し，(余り = 他) の形になるようにする。また，便宜的に式の順番を逆にする。
  - $1=43-6\cdot7 \qquad \cdots①$
  - $6=49-43\cdot1 \qquad \cdots②$
  - $43=92-49\cdot1 \qquad \cdots③$

  一番上の式に順番に二個目以降の式を代入していく。

$$\begin{aligned}1&=43-6\cdot7 && (①)\\&=43-(49-43\cdot1)\cdot7 && (②\text{を代入})\\&=43\cdot8-49\cdot7 && (\text{整理})\\&=(92-49\cdot1)\cdot8-49\cdot7 && (③\text{を代入})\\&=92\cdot8-49\cdot15 && (\text{整理})\end{aligned}$$

  これにより特殊解 $(x,\ y)=(8,\ -15)$ が求められた。

(1) $x=1,2,\ldots$ と代入して探すと，$x=2$ で $y=-3$ という解を見つけることができました。

(2) (1) で得られた特殊解を用いて式変形をすると，係数 7，11 が互いに素である性質を利用して一般解を導くことができます。

(3) 一般解から実際に解となる組を列挙しています。x ではなく y に値を入れて考えたのは，$0\leqq x\leqq100$ を満たす $x=7m+2$ は $x=2,9,\ldots,100$ で，範囲内にある y の数より多く，それらから絞るのが手間であるためです。

5.4　採点

【第 5 問　15 点】

議論の要所で部分点を与える。

(1) 4 点

(2) 6 点

(3)　5 点

6　第 6 問：倍数の判定と論証

6.1　問題

自然数 a，b，c が，等式

$$a^2+b^2=c^2$$

を満たしている。

(1)　自然数の平方を 3 で割った余りは 0 または 1 であることを示せ。

(2)　自然数の平方を 4 で割った余りは 0 または 1 であることを示せ。

(3)　a，b，c のいずれかは 3 の倍数であることを示せ。

(4)　a，b，c のいずれかは 5 の倍数であることを示せ。

(5)　a，b のいずれかは偶数であることを示せ。

(6)　ab は 12 の倍数であることを示せ。

6.2　解答

(1)　自然数は $3k$，$3k\pm1$（k は整数）のいずれかで表される。それぞれの平方について，3 を法とする合同式を考えると，

$$(3k)^2\equiv0,\quad (3k\pm1)^2\equiv(\pm1)^2\equiv1$$

であり，いずれも 3 で割った余りが 0 か 1 であることが分かる。

(2)　自然数は $2k$，$2k+1$（k は整数）のいずれかで表される。それぞれの平方について，4 を法とする合同式を考えると，

$$(2k)^2\equiv0,\quad (2k+1)^2\equiv1^2\equiv1$$

であり，いずれも 4 で割った余りが 0 か 1 であることが分かる。

(3)　背理法により示す。a，b，c がいずれも 3 の倍数ではないと仮定すると，(1) よりその平方 a^2，b^2，c^2 を 3 で割った余りは 1 である。与式の左辺 a^2+b^2 を 3 で割った余りは $1+1=2$，右辺 c^2 を 3 で割った余りは 1 であり，等式が成り立たない。よって仮定は否定され，a，b，c のいずれかは 3 の倍数であるといえる。

(4)　まず，次の事柄が言える。

命題　自然数の平方を 5 で割った余りは，その自然数が 5 の倍数であるならば 0，そうでないならば 1 または 4 である。

証明　自然数は $5k$，$5k\pm1$，$5k\pm2$（k は整数）のいずれかで表される。それぞれの平方について，5 を法とする合同式を考えると，

$$(5k)^2\equiv0,\quad (5k\pm1)^2\equiv1,\quad (5k\pm2)^2\equiv4$$

である。

題の命題を背理法により示す。a，b，c がいずれも 5 の倍数ではないと仮定する。この場合

a^2，b^2，c^2 を 5 で割った余りはいずれも 1 または 4 である。5 を法とする合同式を考えると，与式の左辺は

$$a^2 \equiv 1,\quad b^2 \equiv 1 \quad \text{のとき} \quad a^2+b^2 \equiv 1+1 \equiv 2$$

$$a^2 \equiv 4,\quad b^2 \equiv 1 \quad \text{のとき} \quad a^2+b^2 \equiv 4+1 \equiv 0$$

$$a^2 \equiv 1,\quad b^2 \equiv 4 \quad \text{のとき} \quad a^2+b^2 \equiv 1+4 \equiv 0$$

$$a^2 \equiv 4,\quad b^2 \equiv 4 \quad \text{のとき} \quad a^2+b^2 \equiv 4+4 \equiv 3$$

となり，右辺は $c^2 \equiv 1$ または $c^2 \equiv 4$ であるから，与式の左辺と右辺をそれぞれ 5 で割った余りが等しくならず矛盾する。従って，仮定は否定され，a，b，c のいずれかは 5 の倍数であるといえる。

(5) 背理法により示す。a，b がどちらも奇数であると仮定する。4 を法とする合同式を考えると，(2) より $a^2 \equiv 1$, $b^2 \equiv 1$ であるため，(左辺) $\equiv 1+1 \equiv 2$ である。右辺は $c^2 \equiv 0$ または $c^2 \equiv 1$ であるため，等式が成り立たず矛盾する。従って，仮定は否定され，a，b のいずれかは偶数であるといえる。

(6) (i) (1) と (3) の議論から，a と b のどちらも 3 の倍数ではない場合，等式の左辺を 3 で割った余りは 2 となり，右辺のそれと等しくなることはない。ゆえに a と b のいずれかは 3 の倍数である。

(ii) ab が 4 の倍数であることをいうために，a と b のいずれかが 4 の倍数であるか，どちらも 2 の倍数であることを示したい。この否定「a，b がともに 4 の倍数でなく，少なくとも一方は奇数である。」を考え，背理法で示す。8 を法として，自然数 x，x^2 と合同な 0 以上 7 以下の整数は次の通りである。

x	0	1	2	3	4	5	6	7
x^2	0	1	4	1	0	1	4	1

上で挙げた否定を仮定する。a と b の対称性より，a を奇数，b を 4 の倍数でない自然数として考えてよい。8 を法として a^2 は 1 と合同，b^2 は 1 または 4 と合同である。よって，a^2+b^2 は $1+1=2$ または $1+4=5$ と合同であり，c^2 が 0，1，4 のいずれかと合同であることに矛盾する。よって，背理法より，a と b のいずれかが 4 の倍数であるか，a と b がともに 2 の倍数であることがいえる。このことから，ab は 4 の倍数である。

以上 (i)，(ii) より，ab は 3 の倍数かつ ab は 4 の倍数であるため，ab は 12 の倍数である。

6.3 解説

割り算の余りに注目して，背理法を用いつつ証明しています。

(1) 設問の命題「自然数の平方を 3 で割った余りは 0 または 1 である。」はよく用いられます。

(2) 設問の命題「自然数の平方を 4 で割った余りは 0 または 1 である。」もよく用いられます。

6.4 採点

【第 6 問　22 点】

(1)　3 点

(2)　3 点

(3)　3 点

(4)　4 点

(5)　4 点

(6)　5 点