確 認 試 験 問 題

図 形 の 性 質

解 答 例 ・ 解 説

試験時間： 90 分

問題数： 5 問

配点： 100 点

最終改訂日：2026/04/14

1　第 1 問：三角形の五心

1.1　問題

三角形の五心は重心，内心，外心，垂心，傍心である。それぞれについて定義を述べよ。また，適当な鋭角三角形を 5 つ描き，五心それぞれについて 1 つずつ三角形を対応させ，その性質が分かるように三角形の上に図示せよ。

1.2　解答

- 三角形の 3 つの頂点からそれぞれ中線を引くと，その 3 線は 1 点で交わる。この点を重心という。
- 三角形の 3 つの内角からそれぞれ二等分線を引くと，その 3 線は 1 点で交わる。この点を内心という。
- 三角形の 3 辺それぞれに垂直二等分線を引くと，その 3 線は 1 点で交わる。この点を外心という。
- 三角形の 3 つの頂点からそれぞれ対辺に垂線を下ろすと，その 3 線は 1 点で交わる。この点を垂心という。
- 三角形の 1 つの内角の二等分線と，残り 2 つの外角の二等分線を引くと，その 3 線は 1 点で交わる。この点を傍心という。

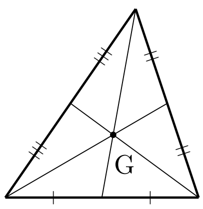


図 1.1: 重心 G

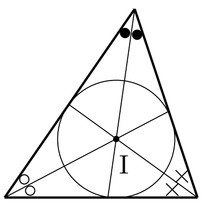


図 1.2: 内心 I

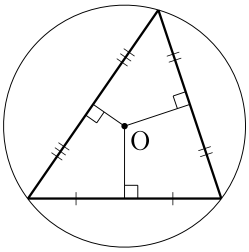


図 1.3: 外心 O

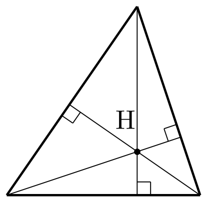


図 1.4: 垂心 H

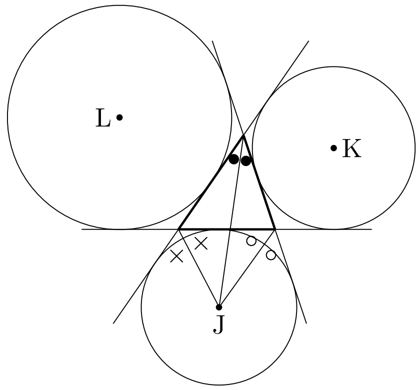


図 1.5: 傍心 J，K，L

1.3　解説

定義をきちんと押さえているかを問うています。

1.4　採点

【第 1 問　20 点】

五心それぞれに 4 点ずつ。4 点の内訳は，定義に 2 点，図示に 2 点。図示は定義あるいは性質が分かる内容が 1 つ以上含まれていれば良いとする。傍心は 1 つで良い。

2　第 2 問：五心とオイラー線

2.1　問題

鋭角三角形 ABC の外心を O，垂心を H，重心を G とする。

(1)　三角形 ABC が正三角形でないとする。点 O から辺 BC に垂線を下ろし，その足を L とする。このとき，$\mathrm{AH} = 2\mathrm{OL}$ であることを示せ。

(2)　三角形 ABC が正三角形でないとする。3 点 O，G，H は一直線上にあることを示せ。また，$\mathrm{OG} : \mathrm{GH} = 1 : 2$ であることを示せ。

(3)　三角形 ABC が正三角形であるとき，3 点 O，G，H は一致することを示せ。

2.2　解答

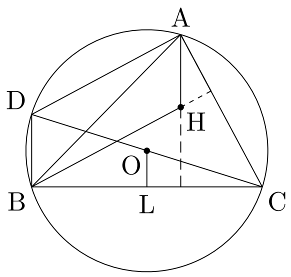


図 2.1

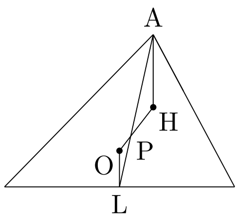


図 2.2

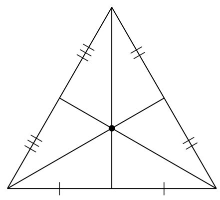


図 2.3

(1)　図 2.1 で考える。半直線 CO と，△ABC の外接円 O との交点を D とする。

(i)　円の中心から弦に下ろした垂線は弦を二等分するから，点 L は BC の中点である。

(ii)　OC，OD は円 O の半径であるから，$\mathrm{OC} = \mathrm{OD}$ であり，点 O は CD の中点である。

(iii)　(i) と (ii) より，中点連結定理から $\mathrm{DB} = 2\mathrm{OL}$ である。

(iv)　$\angle\mathrm{DBC}$ は円 O の直径 CD に対する円周角であるから，$\angle\mathrm{DBC} = 90^\circ$ である。ゆえに $\mathrm{DB} \perp \mathrm{BC}$ である。

(v)　点 H は △ABC の垂心であるから，その定義より $\mathrm{AH} \perp \mathrm{BC}$ である。

(vi)　(iv) と (v) より，$\mathrm{DB} \mathbin{/\!/} \mathrm{AH}$ である。

(vii)　$\angle\mathrm{DAC}$ は円 O の直径 CD に対する円周角であるから，$\angle\mathrm{DAC} = 90^\circ$ である。ゆえに $\mathrm{DA} \perp \mathrm{AC}$ である。

(viii)　点 H は △ABC の垂心であるから，その定義より $\mathrm{BH} \perp \mathrm{AC}$ である。

(ix)　(vii) と (viii) より，$\mathrm{DA} \mathbin{/\!/} \mathrm{BH}$ である。

(x)　(vi) と (ix) より，四角形 ADBH は平行四辺形であるから，$\mathrm{DB} = \mathrm{AH}$ である。

(iii) と (x) より，$\mathrm{AH} = 2\mathrm{OL}$ と結論付けられる。

(2)　図 2.2 で考える。OH と AL の交点を P とおく。

(i)　OL と AH は共に BC と垂直であるため，$AH \parallel OL$ である。

(ii)　対頂角は等しいから，$\angle OPL = \angle APH$ である。

(iii)　(i) より，平行な 2 直線における錯角は等しいから，$\angle AHP = \angle LOP$ である。

(iv)　(ii)，(iii) と (1) の結論 $AH = 2OL$ より，$\triangle OPL$ と $\triangle HPA$ は相似で，その相似比は $1 : 2$ である。

(v)　(ii) より，$AP : PL = 1 : 2$ である。

(vi)　(iv) より，$OP : PH = 1 : 2$ である。

(vii)　点 L は中線であることと，(v) より，重心の性質から，P は重心 G と一致する。

(vi) と (vii) から，OH 上の点 G は $OG : GH = 1 : 2$ を満たす。

(3)　$\triangle ABC$ の各頂点から対辺に垂線を下ろす。$\triangle ABC$ が正三角形のとき，3 辺が等しいことから，その垂線の足は辺の中点に下りる。この垂線 3 本の交点を X とすると，重心，外心，垂心の定義

- 重心とは，3 本の中線の交わる点である。
- 外心とは，3 辺の垂直二等分線が交わる点である。
- 垂心とは，3 本の垂線の交わる点である。

に点 X は全て該当する。よって点 X は 3 点 O，G，H が全て一致した点である。

2.3　解説

正三角形以外の三角形について，外心 O，重心 G，垂心 H は必ず一直線上にあり，この直線のことをオイラー線といいます。重心 G は外心と垂心を $1 : 2$ に内分します。

2.4　採点

【第 2 問　16 点】

(1)　6 点

(2)　6 点

(3)　4 点

3　第 3 問：三角形と各種定理

3.1　問題

三角形 ABC の 3 辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 D，E，F があり，AD，BE，CF は 1 点 I で交わっている。また，EF と BC は平行でなく，半直線 EF と直線 BC は点 K で交わっている。

(1)　BD : CD = BK : CK が成り立つことを示せ。

(2)　I が △ABC の内心であるとき，2 直線 AD，AK は垂直に交わることを示せ。

3.2　解答

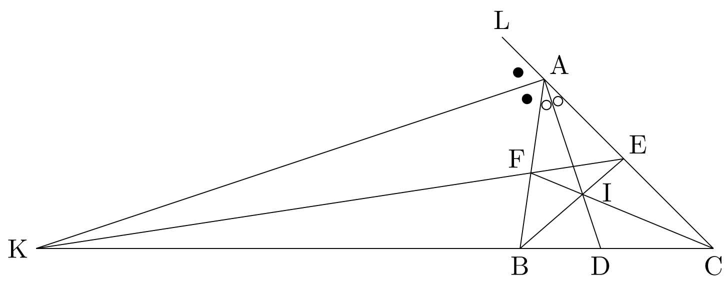


図 3.1

(1)　チェバの定理より，

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \cdot \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \cdot \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} = 1 \tag{3.1}$$

である。また，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{CK}}{\mathrm{KB}} \cdot \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FA}} \cdot \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}} = 1 \tag{3.2}$$

である。(3.1)と (3.2)の各辺の積をとり，

$$\frac{\mathrm{BD} \cdot \mathrm{CK}}{\mathrm{DC} \cdot \mathrm{KB}} = 1$$

を整理して

$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{CK}}$$

を得る。これは BD : CD = BK : CK を表している。

(2)　内心 I の定義から，

$$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{DAC} \tag{3.3}$$

である。したがって，

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BD} : \mathrm{CD}$$

となる。これと (1) から

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BK} : \mathrm{CK}$$

である。これは，AK が ∠A の外角の二等分線であることを表している。よって，CA の延長

線上に点 L をおくと，

$$\angle \mathrm{KAB} = \angle \mathrm{KAL} \tag{3.4}$$

である。図 3.1 より

$$\angle \mathrm{CAD} + \angle \mathrm{DAB} + \angle \mathrm{BAK} + \angle \mathrm{KAL} = 180^\circ$$

であることと (3.3)，(3.4)より，

$$2(\angle \mathrm{BAD} + \angle \mathrm{KAB}) = 180^\circ$$

ゆえに $\angle \mathrm{KAD} = 90^\circ$ である。よって $\mathrm{AD} \perp \mathrm{AK}$ である。

3.3　解説

(1)　チェバの定理とメネラウスの定理をともに用いる問題です。

(2)　直線が垂直に交わることを，角度が 90° になることを用いて示しています。

3.4　採点

【第 3 問　16 点】

(1)　8 点

(2)　8 点

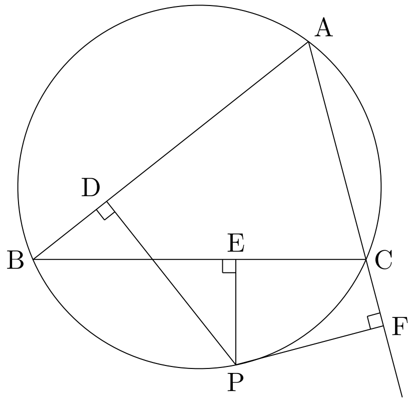
4　第 4 問：円とシムソン線

4.1　問題

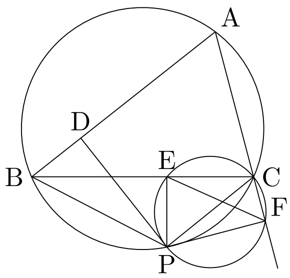
三角形 ABC とその外接円 S を考える。S 上の，点 A を含まない弧 BC から，B，C とは異なる 1 点 P をとり，直線 AB，BC，CA に，それぞれ垂線 PD，PE，PF を下ろす。

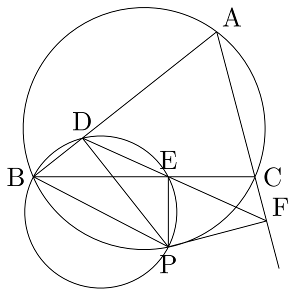
(1)　$\angle\mathrm{PBD} = \angle\mathrm{PEF}$ であることを示せ。

(2)　3 点 D，E，F は一直線上にあることを示せ。



4.2　解答





(1)　4 点 A，B，C，P は同一円周上にあるから，

$$\angle\mathrm{PBD} + \angle\mathrm{PCA} = 180^\circ$$

が成り立つ。また，3 点 A，C，F は同一直線上にあるから，

$$\angle\mathrm{PCF} + \angle\mathrm{PCA} = 180^\circ$$

が成り立つ。この 2 式から，

$$\angle\mathrm{PBD} = \angle\mathrm{PCF} \tag{4.1}$$

となる。また，$\angle\mathrm{PEC} = \angle\mathrm{PFC} = 90^\circ$ より，4 点 P，E，C，F は線分 PC を直径とする円周上にあるから，円周角の性質より，

$$\angle\mathrm{PCF} = \angle\mathrm{PEF} \tag{4.2}$$

が成り立つ。(4.1)と (4.2)より，

$$\angle\mathrm{PBD} = \angle\mathrm{PEF}$$

である。

(2)　$\angle\mathrm{PDB} = \angle\mathrm{PEB} = 90^\circ$ より，4 点 B，D，E，P は線分 BP を直径とする円周上にあるから，

$$\angle\mathrm{PBD} + \angle\mathrm{PED} = 180^\circ$$

が成り立つ。これと (1) から

$$\angle\mathrm{PED} + \angle\mathrm{PEF} = 180^\circ$$

となるから，3 点 D，E，F は同一直線上にある。

4.3　解説

問題のように，三角形の外接円上の点から各辺に垂線を下ろすと，その垂線の足となる 3 点は一直線上にあります。これをシムソンの定理といい，その直線のことをシムソン線といいます。また，シムソンの定理の逆も成り立ちます。ある点 P から三角形の各辺に垂線を下ろし，その足となる 3 点が一直線上にあれば，P はその三角形の外接円上にあります。

4.4　採点

【第 4 問　16 点】

(1)　8 点

(2)　8 点

5　第 5 問：円の共通接線と方べきの定理

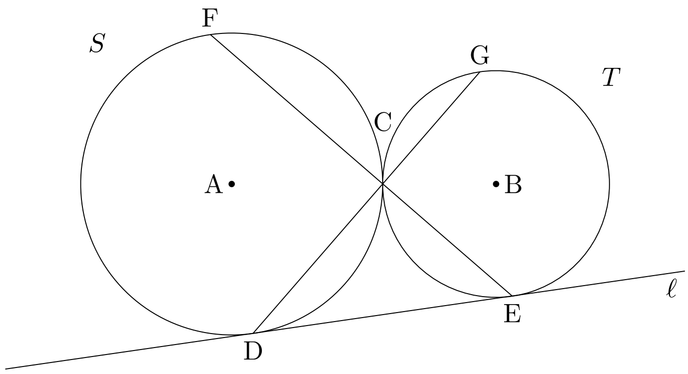
5.1　問題

中心を A とする半径 4 の円 S と，中心を B とする半径 3 の円 T が点 C で外接しており，直線 ℓ が，2 つの円 S，T と，異なる点 D，E においてそれぞれ接している。半直線 EC と円 S との点 C でない交点を F，半直線 DC と円 T との点 C でない交点を G とする。

(1)　線分 DE の長さを求めよ。

(2)　線分の長さの積についての 2 つの式 $\mathrm{DC}\cdot\mathrm{DG}$，$\mathrm{EC}\cdot\mathrm{EF}$ の値は等しいことを示し，その値を求めよ。

(3)　点 E から，円 S と異なる 2 点で交わるように半直線を伸ばし，その交点を H，I とする。ただし，3 点 E，H，I はこの順で一直線上にあるとする。$\mathrm{HI}=6$ のとき，線分 EH の長さを求めよ。



5.2　解答

(1)　点 B から線分 AD に垂線を下ろし，その足を J とする。四角形 JDEB の内角は全て直角となるから，この四角形は長方形である。よって $\mathrm{DE}=\mathrm{JB}$ である。また，$\triangle\mathrm{AJB}$ において，三平方の定理より，

$$\mathrm{AJ}^2+\mathrm{JB}^2=\mathrm{AB}^2$$

が成り立つ。

$$\mathrm{AJ}=\mathrm{AD}-\mathrm{JD}=\mathrm{AD}-\mathrm{BE}=4-3=1,$$
$$\mathrm{AB}=4+3=7$$

より，

$$\mathrm{JB}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{AJ}^2}=\sqrt{7^2-1^2}=4\sqrt{3}$$

となるから，$\mathrm{DE}=4\sqrt{3}$ である。

(2)　方べきの定理より

$$\mathrm{DC}\cdot\mathrm{DG}=\mathrm{DE}^2=48,$$

$$\mathrm{EC}\cdot\mathrm{EF}=\mathrm{DE}^2=48$$

であり，2 つの式が等しい値 48 をとることが示された。

(3)　線分 EH の長さを x とおく。方べきの定理より，

$$\mathrm{EH}\cdot\mathrm{EI}=\mathrm{DE}^2$$

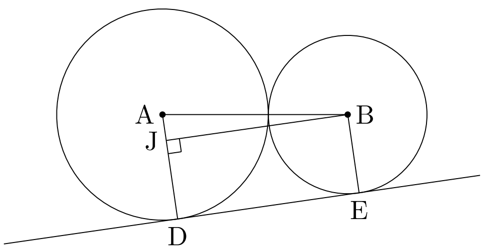
である。$\mathrm{EI}=\mathrm{EH}+\mathrm{HI}=x+6$，$\mathrm{DE}^2=48$ より，この等式は

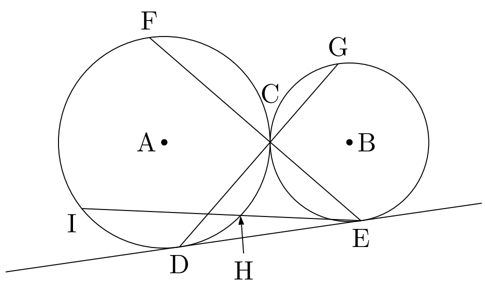
$$x(x+6)=48$$

と表すことができ，これを解いて得られる $x=-3\pm\sqrt{57}$ のうち，$x>0$ を満たすものが $x=\mathrm{EH}$ の値である。よって，

$$\mathrm{EH}=-3+\sqrt{57}$$

である。





5.3　解説

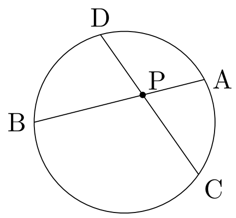


図 5.1

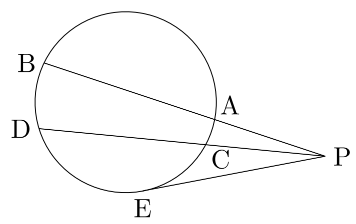


図 5.2

方べきの定理を用いています。図 5.1 は円の内部に点 P がある場合で

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$$

が成り立ちます。図 5.2 は円の外部に点 P がある場合で

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}=\mathrm{PE}^2$$

が成り立ちます。なお，直線 PE は円と接しています。

5.4　採点

【第 5 問　16 点】

(1)　6 点

(2)　5 点

(3)　5 点

6　第 6 問：チェバの定理とメネラウスの定理

6.1　問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

(1)　三角形 ABC の辺 BC 上に，点 B，C とは異なる点 D をとる。∠ADB の二等分線と辺 AB の交点を E，∠ADC の二等分線と辺 AC の交点を F とする。このとき，3 つの線分 AD，BF，CE は一点で交わることを示せ。

(2)　平行四辺形 ABCD の，周でない内部に点 P をとる。点 P を通り，辺 AB に平行な直線と，辺 AD，BC との交点をそれぞれ E，F とする。同様に，点 P を通り，辺 AD に平行な直線と，辺 AB，CD との交点をそれぞれ G，H とする。2 つの直線 EH，FG が点 I で交わるとき，3 点 I，A，C は一直線上にあることを示せ。

6.2　解答

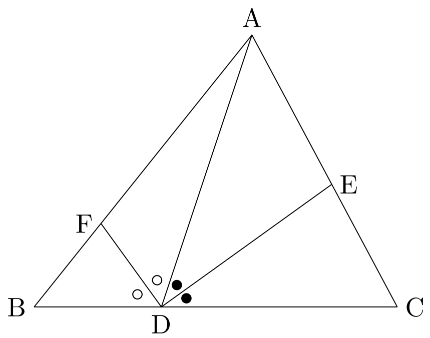


図 6.1

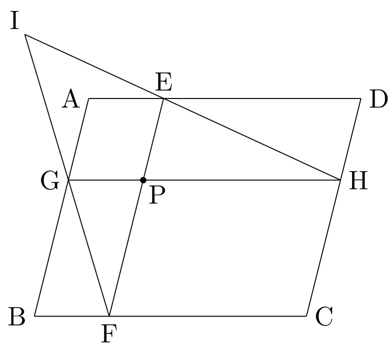


図 6.2

(1)　△DAC について，角の二等分線の性質より，

$$\mathrm{DC : DA = CE : EA}$$

が成り立つ。これを比の値で考えると

$$\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{DA}} = \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} \tag{6.1}$$

である。同様に △DAB について考えると

$$\mathrm{DA : DB = AF : FB}$$

が成り立ち，これを比の値で考えると

$$\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DB}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \tag{6.2}$$

である。(6.1)，(6.2)の各辺の積をとった

$$\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{DA}} \cdot \frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DB}} = \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} \cdot \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}$$

を整理し，

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}} \cdot \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DB}} \cdot \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FA}} = 1$$

が成り立つ。チェバの定理の逆により，3 線分 AD，BF，CE は一点で交わる。

(2)　図 6.2 について，△PFG と直線 IH においてメネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{HP}} \cdot \frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EF}} \cdot \frac{\mathrm{FI}}{\mathrm{IG}} = 1 \tag{6.3}$$

である。平行四辺形の性質から

$$\mathrm{GH} = \mathrm{BC}, \quad \mathrm{HP} = \mathrm{CF}, \quad \mathrm{PE} = \mathrm{AG}, \quad \mathrm{EF} = \mathrm{AB}$$

であるので，(6.3)は

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CF}} \cdot \frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{AB}} \cdot \frac{\mathrm{FI}}{\mathrm{IG}} = 1$$

と表せ，整理して

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CF}} \cdot \frac{\mathrm{FI}}{\mathrm{IG}} \cdot \frac{\mathrm{GA}}{\mathrm{AB}} = 1$$

を得る。メネラウスの定理の逆により，3 点 I，A，C は一直線上にある。

6.3　解説

チェバの定理とメネラウスの定理，およびその逆を用いた証明問題です。チェバの定理もメネラウスの定理も，

$$\frac{①}{②} \cdot \frac{③}{④} \cdot \frac{⑤}{⑥} = 1$$

のような順番で，三角形の頂点→分点→頂点→分点→頂点→分点→頂点と三角形をなぞることによって立式できます。

6.4　採点

【第 6 問　16 点】

(1)　8 点

(2)　8 点