

確認試験問題

集合と論理

(配点 100点)

(日付) _____ 年 _____ 月 _____ 日

(開始)

--	--	--	--	--

 :

--	--	--	--

 ~ (90分) ~

--	--	--	--	--

 (終了)

注意事項

1. 上の日付の欄に、試験を行う日付を記入しなさい。
2. 上の開始と終了の欄に、試験開始予定の時刻とその90分後の時刻を、それぞれ記入しなさい。試験はその時間内に行われます。
3. 試験に関係の無い物の持ち込みは、原則として認められません。
4. 試験時間中は、アラーム機能以外での電子機器の使用は認められません。
5. 試験開始の時刻になるまで、この試験の問題を見てはいけません。
6. この問題冊子は全部で8ページあります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があれば、監督者に知らせなさい。
7. この試験は6問で構成されています。解答用紙は第1問から第6問までに対応するものを用意しなさい。
8. 解答には、黒色鉛筆か、または黒色シャープペンシルを使用しなさい。
9. 解答用紙の指定欄に、試験名、氏名、学生番号を記入しなさい。
10. 問題ごとに、解答欄が指定されています。解答は、必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
11. 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。また、解答用紙の欄外の余白には、何も書いてはいけません。
12. この問題冊子の余白は、書き込みに関しては自由に使用してもよいが、どのページも破棄してはいけません。
13. 試験時間中は、やむを得ない場合を除き、退場してはいけません。
14. 試験後は、問題用紙と解答用紙を自由に活用しなさい。

第 1 問

(配点 12)

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 命題「奇数の平方は奇数である。」の真偽を調べ、偽であれば反例を挙げよ。
- (2) x を実数とする。条件 $-2 < x \leq 3$ の否定を述べよ。
- (3) 命題「すべての実数 x について、 $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ が成り立つ。」の否定について、それを述べたうえで真偽を調べ、偽であれば反例を挙げよ。
- (4) 命題「ある自然数 n について、 $6n - 5$ は素数である。」の否定について、それを述べたうえで真偽を調べ、偽であれば反例を挙げよ。
- (5) a, b を実数とする。命題「『 $a = 0$ かつ $b = 0$ 』ならば、 $ab = 0$ である。」の逆について、それを述べたうえで真偽を調べ、偽であれば反例を挙げよ。
- (6) x を実数とする。命題「 $x^2 = 0$ ならば、 $x = 0$ である。」の裏について、それを述べたうえで真偽を調べ、偽であれば反例を挙げよ。

第 2 問

(配点 15)

以下それぞれの命題 P , Q に対して, P は Q であるための

- 必要十分条件である。
- 必要条件だが, 十分条件ではない。
- 十分条件だが, 必要条件ではない。
- 必要条件でも十分条件でもない。

のいずれであるかを答えよ。

- (1) a, b を実数とする。

命題 P : $a > 0$ かつ $b > 0$ である。

命題 Q : $a + b > 0$ である。

- (2) 三角形 ABC について考える。

命題 P : $\angle A = 60^\circ$ である。

命題 Q : $AB^2 + BC^2 = CA^2$ である。

- (3) p, q を実数とする。

命題 P : pq が有理数である。

命題 Q : p と q がともに有理数である。

- (4) n を自然数とする。

命題 P : n^2 が 4 の倍数である。

命題 Q : n が 4 の倍数である。

- (5) x と y を実数とする。

命題 P : $x = 0$ かつ $y = 0$ である。

命題 Q : $x^2 + y^2 = 0$ である。

第 3 問

(配点 19)

- (1) 自然数 n について、 n^2 が 6 の倍数であるならば、 n は 6 の倍数であることを証明せよ。
- (2) $\sqrt{6}$ が無理数であることを証明せよ。
- (3) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。
- (4) 有理数 a, b が $a + b\sqrt{6} = 0$ を満たしているとき、 $a = b = 0$ であることを証明せよ。

第 4 問

(配点 17)

自然数 a, b, c が,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

を満たしている。

- (1) 自然数 n について, n^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。
- (2) a, b のうち少なくとも一方は 3 の倍数であることを証明せよ。
- (3) a, b, c のいずれかは 5 の倍数であることを証明せよ。

第 5 問

(配点 19)

n を自然数とする。

- (1) $n(n+1)(2n+1)$ は 6 の倍数であることを証明せよ。
- (2) $n^2(n+1)^2$ は 4 の倍数であることを証明せよ。
- (3) $n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$ は 30 の倍数であることを証明せよ。
- (4) $n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$ は 12 の倍数であることを証明せよ。

第 6 問

(配点 18)

正しいか正しくないかが明確に定まる文や式を「命題」という。命題 P が正しいとき、 P は真であるといい、その値を 1 と定める。 P が正しくないとき、 P は偽であるといい、その値を 0 と定める。 \top を常に 1 の値をとる命題とし、 \perp を常に 0 の値をとる命題とする。

4 つの論理演算 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ を次のように定める。

- \neg は「否定」と呼び、命題 P について、 $\neg P$ は「 P でない」を表す。
- \vee は「選言」と呼び、命題 P, Q について、 $P \vee Q$ は「 P または Q 」を表す。
- \wedge は「連言」と呼び、命題 P, Q について、 $P \wedge Q$ は「 P かつ Q 」を表す。
- \rightarrow は「含意」と呼び、命題 P, Q について、 $P \rightarrow Q$ は「 P ならば Q 」を表す。

命題と論理演算を用いて、次の規則 (i), (ii), (iii), (iv) によって「論理式」を定める。演算の順番が分かるように括弧 $()$ を用いる場合がある。

- (i) P を命題とすると、 P は論理式である。
- (ii) P を論理式とすると、 $\neg P$ は論理式である。
- (iii) P, Q を論理式とすると、 $P \vee Q, P \wedge Q, P \rightarrow Q$ はいずれも論理式である。
- (iv) 以上 (i), (ii), (iii) で定められるものだけを論理式とする。

例えば、 P, Q, R を命題とすると、 $(P \vee Q) \rightarrow ((\neg R) \vee \top)$ は論理式であるが、 $\perp \rightarrow \rightarrow \rightarrow QR$ は論理式ではない。

命題あるいは論理式 P, Q のとる値によって、論理式 $\neg P, P \vee Q, P \wedge Q, P \rightarrow Q$ がどのような値をとるか、次の表に示した。

表 6.1: $\neg P$ の値

P	$\neg P$
1	0
0	1

表 6.2: $P \vee Q, P \wedge Q, P \rightarrow Q$ の値

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

例として、命題 P, Q, R について、 P が 1, Q が 0, R が 1 の値をとるときの

$$((\neg P) \vee Q) \rightarrow (R \wedge P)$$

の値について考える。 P の値が 1 であるから $\neg P$ の値は 0 である。よって $(\neg P) \vee Q$ は \vee の左側の値が 0, 右側の値が 0 であるから、全体としての値は 0 である。 P と R の値がどちらも 1 であるから、 $R \wedge P$ の値は 1 である。したがって、例の式は \rightarrow の左側の値が 0, 右側の値が 1 であるから、式全体の値は 1 である。

\top と \perp 以外の各命題がそれぞれ 0 と 1 どちらの値をとっても、2 つの論理式の値が等しいとき、それらは「同値」とあるという。例えば、 $P \rightarrow Q$ と $(\neg P) \vee Q$ は同値である。

以下では、 $(P \vee Q) \vee R$ と $P \vee (Q \vee R)$ は同値であるため、括弧を省略して $P \vee Q \vee R$ と表記する場合がある。同様に、 $(P \wedge Q) \wedge R$ と $P \wedge (Q \wedge R)$ は同値であるため、 $P \wedge Q \wedge R$ と表記する場合がある。

- (1) P, Q, R を命題とするとき、次の2つの記述 (I), (II) について、それぞれ論理式であるかそうでないかを答えよ。

$$(I) \quad (((\neg P) \rightarrow Q) \vee \perp) \wedge ((R \rightarrow ((\neg P) \vee Q)) \rightarrow P)$$

$$(II) \quad (((\neg P) \rightarrow Q^2) \rightarrow R) \vee (Q \approx R)$$

- (2) P, Q, R を命題とする。次の論理式 (I), (II) それぞれについて、 P の値が1、 Q の値が0、 R の値が1であるときの論理式の値を求めよ。

$$(I) \quad ((\neg P) \rightarrow Q) \wedge (R \vee ((Q \wedge R) \rightarrow \top))$$

$$(II) \quad (Q \rightarrow (\perp \vee P \vee R)) \rightarrow ((\neg R) \wedge \top)$$

- (3) P, Q を命題とする。 $P \rightarrow Q$ と $(\neg P) \vee Q$ が同値であることを、表 6.2 にならって表を作ることで確かめよ。さらに、 $P \rightarrow Q$ の対偶である $(\neg Q) \rightarrow (\neg P)$ がそれら2つと同値であることを、同様にして確かめよ。

- (4) P, Q を命題とする。次の4つの論理式 (I), (II), (III), (IV) のうち、 $P \vee Q$ と同値であるものをすべて挙げよ。

$$(I) \quad (\neg P) \wedge Q \wedge (P \rightarrow Q)$$

$$(II) \quad ((\neg P) \vee Q) \rightarrow Q$$

$$(III) \quad (Q \rightarrow P) \rightarrow (\neg(\neg P))$$

$$(IV) \quad Q \vee ((\neg P) \wedge Q) \vee (P \rightarrow Q)$$

- (5) P, Q を命題とする。次の4つの論理式 (I), (II), (III), (IV) のうち、 P と Q のとる値によらず常に1の値をとる論理式をすべて挙げよ。

$$(I) \quad (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$$

$$(II) \quad (P \vee (\neg Q)) \vee (P \rightarrow Q)$$

$$(III) \quad (Q \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (\neg P))$$

$$(IV) \quad (Q \rightarrow ((Q \vee P) \wedge P)) \rightarrow ((\neg Q) \vee (Q \rightarrow P))$$