確　認　試　験　問　題

集 合 と 論 理

（配点　100 点）

（日付）　　　　年　　　月　　　日

（開始） |　|　|:|　|　| ～（90 分）～ |　|　|:|　|　| （終了）

注　意　事　項

1. 上の日付の欄に，試験を行う日付を記入しなさい。
2. 上の開始と終了の欄に，試験開始予定の時刻とその 90 分後の時刻を，それぞれ記入しなさい。試験はその時間内に行われます。
3. 試験に関係の無い物の持ち込みは，原則として認められません。
4. 試験時間中は，アラーム機能以外での電子機器の使用は認められません。
5. 試験開始の時刻になるまで，この試験の問題を見てはいけません。
6. この問題冊子は全部で 20 ページあります。落丁，乱丁または印刷不鮮明の箇所があれば，監督者に知らせなさい。
7. この試験は 6 問で構成されています。解答用紙は第 1 問から第 6 問までに対応するものを用意しなさい。
8. 解答には，黒色鉛筆か，または黒色シャープペンシルを使用しなさい。
9. 解答用紙の指定欄に，試験名，氏名，学生番号を記入しなさい。
10. 問題ごとに，解答欄が指定されています。解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
11. 解答用紙の解答欄に，関係のない文字，記号，符号などを記入してはいけません。また，解答用紙の欄外の余白には，何も書いてはいけません。
12. この問題冊子の余白は，書き込みに関しては自由に使用してもよいが，どのページも破棄してはいけません。
13. 試験時間中は，やむを得ない場合を除き，退場してはいけません。
14. 試験後は，問題用紙と解答用紙を自由に活用しなさい。

計　算　用　紙

第　1　問　　（配点　12）

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

(1)　命題「奇数の平方は奇数である。」の真偽を調べ，偽であれば反例を挙げよ。

(2)　x を実数とする。条件 $-2 < x \leqq 3$ の否定を述べよ。

(3)　命題「すべての実数 x について，$x^2 - 2x - 3 \geqq 0$ が成り立つ。」の否定について，それを述べたうえで真偽を調べ，偽であれば反例を挙げよ。

(4)　命題「ある自然数 n について，$6n - 5$ は素数である。」の否定について，それを述べたうえで真偽を調べ，偽であれば反例を挙げよ。

(5)　a，b を実数とする。命題「『$a = 0$ かつ $b = 0$』ならば，$ab = 0$ である。」の逆について，それを述べたうえで真偽を調べ，偽であれば反例を挙げよ。

(6)　x を実数とする。命題「$x^2 = 0$ ならば，$x = 0$ である。」の裏について，それを述べたうえで真偽を調べ，偽であれば反例を挙げよ。

計　算　用　紙

第　2　問　　　　（配点　15）

以下それぞれの命題 P，Q に対して，P は Q であるための

- 必要十分条件である。
- 必要条件だが，十分条件ではない。
- 十分条件だが，必要条件ではない。
- 必要条件でも十分条件でもない。

のいずれであるかを答えよ。

(1)　a，b を実数とする。

命題 P：　$a > 0$ かつ $b > 0$ である。

命題 Q：　$a + b > 0$ である。

(2)　三角形 ABC について考える。

命題 P：　$\angle \mathrm{A} = 60^\circ$ である。

命題 Q：　$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{CA}^2$ である。

(3)　p，q を実数とする。

命題 P：　pq が有理数である。

命題 Q：　p と q がともに有理数である。

(4)　n を自然数とする。

命題 P：　n^2 が 4 の倍数である。

命題 Q：　n が 4 の倍数である。

(5)　x と y を実数とする。

命題 P：　$x = 0$ かつ $y = 0$ である。

命題 Q：　$x^2 + y^2 = 0$ である。

計　算　用　紙

第　3　問　　　　　　　　　　　　（配点　19）

(1)　自然数 n について，n^2 が 6 の倍数であるならば，n は 6 の倍数であることを証明せよ。

(2)　$\sqrt{6}$ が無理数であることを証明せよ。

(3)　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。

(4)　有理数 a，b が $a+b\sqrt{6}=0$ を満たしているとき，$a=b=0$ であることを証明せよ。

計 算 用 紙

第 4 問 （配点　17）

自然数 a，b，c が，

$$a^2 + b^2 = c^2$$

を満たしている。

(1)　自然数 n について，n^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2)　a，b のうち少なくとも一方は 3 の倍数であることを証明せよ。

(3)　a，b，c のいずれかは 5 の倍数であることを証明せよ。

計　算　用　紙

第　5　問　　　　　　（配点　19）

n を自然数とする。

(1)　$n(n+1)(2n+1)$ は 6 の倍数であることを証明せよ。

(2)　$n^2(n+1)^2$ は 4 の倍数であることを証明せよ。

(3)　$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$ は 30 の倍数であることを証明せよ。

(4)　$n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$ は 12 の倍数であることを証明せよ。

計　算　用　紙

第 6 問 （配点 18）

正しいか正しくないかが明確に定まる文や式を「命題」という。命題 P が正しいとき、P は真であるといい、その値を 1 と定める。P が正しくないとき、P は偽であるといい、その値を 0 と定める。$\top$ を常に 1 の値をとる命題とし，$\bot$ を常に 0 の値をとる命題とする。

4 つの論理演算 $\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\rightarrow$ を次のように定める。

- $\neg$ は「否定」と呼び，命題 P について，$\neg P$ は「P でない」を表す。
- $\vee$ は「選言」と呼び，命題 P，Q について，$P \vee Q$ は「P または Q」を表す。
- $\wedge$ は「連言」と呼び，命題 P，Q について，$P \wedge Q$ は「P かつ Q」を表す。
- $\rightarrow$ は「含意」と呼び，命題 P，Q について，$P \rightarrow Q$ は「P ならば Q」を表す。

命題と論理演算を用いて，次の規則 (i)，(ii)，(iii)，(iv) によって「論理式」を定める。演算の順番が分かるように括弧 () を用いる場合がある。

(i) P を命題とするとき，P は論理式である。

(ii) P を論理式とするとき，$\neg P$ は論理式である。

(iii) P，Q を論理式とするとき，$P \vee Q$，$P \wedge Q$，$P \rightarrow Q$ はいずれも論理式である。

(iv) 以上 (i)，(ii)，(iii) で定められるものだけを論理式とする。

例えば，P，Q，R を命題とするとき，$(P \vee Q) \rightarrow ((\neg R) \vee \top)$ は論理式であるが，$\bot \rightarrow\rightarrow\rightarrow QR$ は論理式ではない。

命題あるいは論理式 P，Q のとる値によって，論理式 $\neg P$，$P \vee Q$，$P \wedge Q$，$P \rightarrow Q$ がどのような値をとるか，次の表に示した。

表 6.1: $\neg P$ の値

P	$\neg P$
1	0
0	1

表 6.2: $P \vee Q$，$P \wedge Q$，$P \rightarrow Q$ の値

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

例として，命題 P，Q，R について，P が 1，Q が 0，R が 1 の値をとるときの

$$((\neg P) \vee Q) \rightarrow (R \wedge P)$$

の値について考える。P の値が 1 であるから $\neg P$ の値は 0 である。よって $(\neg P) \vee Q$ は $\vee$ の左側の値が 0，右側の値が 0 であるから，全体としての値は 0 である。P と R の値がどちらも 1 であるから，$R \wedge P$ の値は 1 である。したがって，例の式は $\rightarrow$ の左側の値が 0，右側の値が 1 であるから，式全体の値は 1 である。

$\top$ と $\bot$ 以外の各命題がそれぞれ 0 と 1 どちらの値をとっても，2 つの論理式の値が等しいとき，それらは「同値」であるという。例えば，$P \rightarrow Q$ と $(\neg P) \vee Q$ は同値である。

以下では，$(P \vee Q) \vee R$ と $P \vee (Q \vee R)$ は同値であるため，括弧を省略して $P \vee Q \vee R$ と表記する場合がある。同様に，$(P \wedge Q) \wedge R$ と $P \wedge (Q \wedge R)$ は同値であるため，$P \wedge Q \wedge R$ と表記する場合がある。

(1) P，Q，R を命題とするとき，次の 2 つの記述 (I)，(II) について，それぞれ論理式であるかそうでないかを答えよ。

(I) $(((\neg P) \to Q) \vee \bot) \wedge ((R \to ((\neg P) \vee Q)) \to P)$

(II) $(((\neg P) \to Q^2) \to R) \vee (Q \approx R)$

(2) P，Q，R を命題とする。次の論理式 (I)，(II) それぞれについて，P の値が 1，Q の値が 0，R の値が 1 であるときの論理式の値を求めよ。

(I) $((\neg P) \to Q) \wedge (R \vee ((Q \wedge R) \to \top))$

(II) $(Q \to (\bot \vee P \vee R)) \to ((\neg R) \wedge \top)$

(3) P，Q を命題とする。$P \to Q$ と $(\neg P) \vee Q$ が同値であることを，表 6.2 にならって表を作ることで確かめよ。さらに，$P \to Q$ の対偶である $(\neg Q) \to (\neg P)$ がそれら 2 つと同値であることを，同様にして確かめよ。

(4) P，Q を命題とする。次の 4 つの論理式 (I)，(II)，(III)，(IV) のうち，$P \vee Q$ と同値であるものをすべて挙げよ。

(I) $(\neg P) \wedge Q \wedge (P \to Q)$

(II) $((\neg P) \vee Q) \to Q$

(III) $(Q \to P) \to (\neg(\neg P))$

(IV) $Q \vee ((\neg P) \wedge Q) \vee (P \to Q)$

(5) P，Q を命題とする。次の 4 つの論理式 (I)，(II)，(III)，(IV) のうち，P と Q のとる値によらず常に 1 の値をとる論理式をすべて挙げよ。

(I) $(P \to Q) \vee (Q \to P)$

(II) $(P \vee (\neg Q)) \vee (P \to Q)$

(III) $(Q \to Q) \to (P \to (\neg P))$

(IV) $(Q \to ((Q \vee P) \wedge P)) \to ((\neg Q) \vee (Q \to P))$

計　算　用　紙

計　算　用　紙

計　算　用　紙

計　算　用　紙