
確 認 試 験 問 題
集 合 と 論 理

解 答 例 ・ 解 説

試験時間：90分

問題数：6問

配点：100点

最終改訂日：2026/04/10

1 第1問：命題と真偽

1.1 問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 命題「奇数の平方は奇数である。」の真偽を調べ、偽であれば反例を挙げよ。
- (2) x を実数とする。条件 $-2 < x \leq 3$ の否定を述べよ。
- (3) 命題「すべての実数 x について、 $x^2 - 2x - 3 \geq 0$ が成り立つ。」の否定について、それを述べたうえで真偽を調べ、偽であれば反例を挙げよ。
- (4) 命題「ある自然数 n について、 $6n - 5$ は素数である。」の否定について、それを述べたうえで真偽を調べ、偽であれば反例を挙げよ。
- (5) a, b を実数とする。命題「『 $a = 0$ かつ $b = 0$ 』ならば、 $ab = 0$ である。」の逆について、それを述べたうえで真偽を調べ、偽であれば反例を挙げよ。
- (6) x を実数とする。命題「 $x^2 = 0$ ならば、 $x = 0$ である。」の裏について、それを述べたうえで真偽を調べ、偽であれば反例を挙げよ。

1.2 解答

- (1) 奇数は整数 k を用いて $2k - 1$ と表せ、その平方は $(2k - 1)^2 = 2(2k^2 - 2k) + 1$ となり、(偶数) + 1 の形となっているため奇数であるから、この命題は真である。
- (2) 与えられた条件の否定は、「 $x \leq -2$ または $3 < x$ 」である。
- (3) 与えられた命題の否定は、「ある実数 x について、 $x^2 - 2x - 3 < 0$ が成り立つ。」である。 $x = 1$ のとき $x^2 - 2x - 3 = -4 < 0$ であるため、これは真である。
- (4) 与えられた命題の否定は、「すべての自然数 n について、 $6n - 5$ は素数ではない。」である。 $n = 2$ のときに $6n - 5 = 7$ となり素数であるため、これは偽である。
- (5) 与えられた命題の逆は、「 $ab = 0$ ならば、『 $a = 0$ かつ $b = 0$ 』である。」である。 $a = 1, b = 0$ のとき、 $ab = 0$ であるが『 $a = 0$ かつ $b = 0$ 』ではないため、これは偽である。
- (6) 与えられた命題の裏は、「 $x^2 \neq 0$ ならば、 $x \neq 0$ である。」であり、これは真である。

1.3 解説

「または」と「かつ」について、否定は次の通り。

- 「 A または B 」の否定は「 A でないかつ B でない」
- 「 A かつ B 」の否定は「 A でないまたは B でない」

存在「ある」と全称「すべての (任意の)」の否定については次の通り。

- 「ある x について A である」の否定は「すべての x について A でない」

- 「すべての x について A である」の否定は「ある x について A でない」

命題の逆, 裏, 対偶については次の通り。

- 命題「 P ならば Q 」の逆は「 Q ならば P 」
- 命題「 P ならば Q 」の裏は「 P でないならば Q でない」
- 命題「 P ならば Q 」の対偶は「 Q でないならば P でない」

元の命題と対偶の真偽は一致します。また, 元の命題の逆と裏の真偽は一致します。ただし, 元の命題と, その裏や逆については真偽が一致するとは限りません。

- (2) $-2 < x \leq 3$ は, 「 $-2 < x$ かつ $x \leq 3$ 」という意味のため, それぞれについて否定をとって「または」で繋がります。不等式の否定は不等式の向きが変わります。 $-2 < x$ には等号が入っていないため, その否定には等号が含まれ, $x \leq 3$ には等号が入っているため, その否定には等号が含まれません。

反例を挙げるときは, 必ず具体的な値を指定するようにします。~~を満たす○○のような書き方をしても, 必ずそのような例が存在するかはわからないためです。

1.4 採点

【第1問 12点】

- (1) 2点
- (2) 2点
- (3) 2点
- (4) 2点
- (5) 2点
- (6) 2点

2 第2問：必要条件と十分条件

2.1 問題

以下それぞれの命題 P , Q に対して, P は Q であるための

- 必要十分条件である。
- 必要条件だが, 十分条件ではない。
- 十分条件だが, 必要条件ではない。
- 必要条件でも十分条件でもない。

のいずれであるかを答えよ。

- (1) a, b を実数とする。

命題 P : $a > 0$ かつ $b > 0$ である。

命題 Q : $a + b > 0$ である。

- (2) 三角形 ABC について考える。

命題 P : $\angle A = 60^\circ$ である。

命題 Q : $AB^2 + BC^2 = CA^2$ である。

- (3) p, q を実数とする。

命題 P : pq が有理数である。

命題 Q : p と q がともに有理数である。

- (4) n を自然数とする。

命題 P : n^2 が 4 の倍数である。

命題 Q : n が 4 の倍数である。

- (5) x と y を実数とする。

命題 P : $x = 0$ かつ $y = 0$ である。

命題 Q : $x^2 + y^2 = 0$ である。

2.2 解答

- (1) 正の数同士の和は正であるため, $P \Rightarrow Q$ は真である。 $P \Leftarrow Q$ は $a = -1, b = 2$ が反例としてあり偽である。よって, P は Q であるための十分条件だが, 必要条件ではない。
- (2) $\triangle ABC$ が正三角形の場合, $\angle A = 60^\circ$ だが, $AB^2 + BC^2 = CA^2$ は成り立たない。よって $P \Rightarrow Q$ は偽である。 $\triangle ABC$ が $\angle A = \angle C = 45^\circ, \angle B = 90^\circ$ の直角二等辺三角形の場合, $AB^2 + BC^2 = CA^2$ は成り立つが $\angle A \neq 60^\circ$ である。よって $P \Leftarrow Q$ も偽である。ゆえに, P は Q であるための必要条件でも十分条件でもない。

- (3) $p = q = \sqrt{2}$ のとき、 $pq = 2$ より pq は有理数だが、 p と q は有理数でない。よって $P \Rightarrow Q$ は偽である。有理数同士の積は有理数であるため、 $P \Leftarrow Q$ は真である。よって P は Q であるための必要条件だが、十分条件ではない。
- (4) $n = 2$ のとき、 $n^2 = 4$ であり n^2 は4の倍数であるが、 n は4の倍数ではない。よって $P \Rightarrow Q$ は偽である。4の倍数の平方は4の倍数であるため、 $P \Leftarrow Q$ は真である。よって P は Q であるための必要条件だが、十分条件ではない。
- (5) $x = 0$ と $y = 0$ を $x^2 + y^2$ に代入した値は0となるため、 $P \Rightarrow Q$ は真である。 $x^2 \geq 0$ 、 $y^2 \geq 0$ より、 $x^2 + y^2 = 0$ が成り立つのは $x = 0$ かつ $y = 0$ のときのみである。よって $P \Leftarrow Q$ も真である。ゆえに、 P は Q であるための必要十分条件である。

2.3 解説

P ならば Q 、すなわち $P \Rightarrow Q$ が成り立つとき、 P は Q であるための十分条件、 Q は P であるための必要条件といいます。矢印の根元にあたる方が十分条件、矢印の先にあたる方が必要条件です。例えば $P \Rightarrow Q$ を考えるとき、「 Q であるためには、 P さえ成り立っていればもう十分」、「 P であるためには、そもそも Q が成り立っていることが最低限必要」のように、日本語をうまく対応させると理解および記憶しやすいかと思います。

2.4 採点

【第2問 15点】

いずれも、解答があてれば得点とするが、過程が記述されている場合、その内容によっては部分点を与える。

- (1) 3点
(2) 3点
(3) 3点
(4) 3点
(5) 3点

3 第3問：無理数の証明

3.1 問題

- (1) 自然数 n について、 n^2 が 6 の倍数であるならば、 n は 6 の倍数であることを証明せよ。
- (2) $\sqrt{6}$ が無理数であることを証明せよ。
- (3) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。
- (4) 有理数 a, b が $a + b\sqrt{6} = 0$ を満たしているとき、 $a = b = 0$ であることを証明せよ。

3.2 解答

- (1) 命題の対偶「 n が 6 の倍数でないならば、 n^2 は 6 の倍数ではない。」を考える。すべての自然数は、自然数 k を用いて $6k - 1, 6k - 2, 6k - 3, 6k - 4, 6k - 5, 6k$ のいずれかで表される。6k 以外は 6 の倍数ではなく、それらについて平方を計算すると、

$$(6k - 1)^2 = 36k^2 - 12k + 1 = 6(6k^2 - 2k) + 1$$

$$(6k - 2)^2 = 36k^2 - 24k + 4 = 6(6k^2 - 4k) + 4$$

$$(6k - 3)^2 = 36k^2 - 36k + 9 = 6(6k^2 - 6k + 1) + 3$$

$$(6k - 4)^2 = 36k^2 - 48k + 16 = 6(6k^2 - 8k + 2) + 4$$

$$(6k - 5)^2 = 36k^2 - 60k + 25 = 6(6k^2 - 10k + 4) + 1$$

となり、6 で割った余りが 1, 3, 4 のいずれかであるため、6 の倍数ではない。したがって、いずれの場合でも 6 の倍数ではないから、自然数 n が 6 の倍数でないならば、 n^2 は 6 の倍数でないことが言え、元の命題の対偶が真であることが示されたため、元の命題も真である。

- (2) $\sqrt{6}$ は正の数であることに注意する。 $\sqrt{6}$ が無理数でないと仮定すると、1 以外に公約数を持たない自然数 p, q を用いて $\sqrt{6} = \frac{q}{p}$ と表すことができる。この両辺を 2 乗すると $6 = \frac{q^2}{p^2}$ となり、分母を払って $6p^2 = q^2$ となる。左辺 $6p^2$ は 6 の倍数であるから、右辺 q^2 も 6 の倍数であり、(1) より q は 6 の倍数である。よって自然数 r を使って $q = 6r$ と表すことができる。すると $6p^2 = (6r)^2$ より $p^2 = 6r^2$ が成り立つ。同様の議論によって p が 6 の倍数となるが、これは p と q が 1 以外の公約数 6 を持つことになり、仮定に矛盾する。したがって、背理法により $\sqrt{6}$ は無理数であることが示された。
- (3) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ が無理数でないと仮定する。この値が正であることに注意すると、1 以外に公約数を持たない自然数 p, q を用いて $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{q}{p}$ と表すことができる。この両辺を 2 乗すると $5 + 2\sqrt{6} = \frac{q^2}{p^2}$ となり、整理して $\sqrt{6} = \frac{q^2}{2p^2} - \frac{5}{2}$ となるが、左辺は (2) より無理数、右辺は有理数となるため矛盾する。したがって、背理法により $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ は無理数であることが示された。
- (4) $b \neq 0$ と仮定すると、等式を整理して $\sqrt{6} = -\frac{a}{b}$ となるが、左辺は (2) より無理数、右辺は有理数となるため矛盾。よって $b = 0$ である。このとき、もとの等式は $a + 0 = 0$ となり、 $a = 0$ を得る。

3.3 解説

- (1) 6の倍数でないパターンを列挙して、どの平方も6の倍数でないことを調べます。6の倍数でない自然数を、整数 k を用いて $6k \pm 1$, $6k \pm 2$, $6k - 3$ と表して計算しても良いですし、こうすると計算量を減らせます。

解答例では、自然数 k を用いて $6k - 1$, ...と書きました。自然数 k について $6k$, $6k + 1$, ..., $6k + 5$ のような書き方をすると、 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ の場合が漏れてしまうため、整数 k と書いたほうが無難かもしれません。

- (2) 背理法で証明しました。 $\sqrt{6}$ が無理数であることを証明するために、 $\sqrt{6}$ が有理数であるとして矛盾を導いています。(3)も同様です。

3.4 採点

【第3問 19点】

- (1) 5点
(2) 5点
(3) 5点
(4) 4点

4 第4問：等式と倍数の判定

4.1 問題

自然数 a, b, c が,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

を満たしている。

- (1) 自然数 n について、 n^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。
- (2) a, b のうち少なくとも一方は 3 の倍数であることを証明せよ。
- (3) a, b, c のいずれかは 5 の倍数であることを証明せよ。

4.2 解答

- (1) すべての自然数は、自然数 k を用いて $3k - 2, 3k - 1, 3k$ のいずれかで表される。それぞれの平方を計算すると、

$$(3k - 2)^2 = 9k^2 - 12k + 4 = 3(3k^2 - 4k + 1) + 1,$$

$$(3k - 1)^2 = 9k^2 - 6k + 1 = 3(3k^2 - 2k) + 1,$$

$$(3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$$

となり、前 2 つは $3 \cdot (\text{整数}) + 1$ の形、最後の式は $3 \cdot (\text{整数})$ の形であるから、これらを 3 で割った余りは 0 か 1 である。よって題意は示された。

- (2) a, b がともに 3 の倍数でないと仮定する。(1) の計算結果より、3 の倍数でない自然数の平方を 3 で割った余りは 1 であるため、 a^2, b^2 を 3 で割った余りはともに 1 であるから、 $a^2 + b^2$ を 3 で割った余りは $1 + 1 = 2$ である。しかし、(1) より c^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であるため、左辺を 3 で割った余りと右辺を 3 で割った余りが等しくならず矛盾する。したがって、 a, b のうち少なくとも一方は 3 の倍数である。

- (3) 5 の倍数でないすべての整数は、整数 k を用いて $5k \pm 1, 5k \pm 2$ のいずれかで表される。これらの平方は

$$(5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1,$$

$$(5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4$$

となり、5 で割った余りは 1, 4 のいずれかである。本題に戻り、 a, b, c のいずれも 5 の倍数でないと仮定すると、 a^2, b^2, c^2 を 5 で割った余りはどれも 1 か 4 である。

- (i) a^2, b^2 ともに 5 で割った余りが 1 であるとする、 $a^2 + b^2 = c^2$ より c^2 を 5 で割った余りは 2 となるが、これは矛盾する。
- (ii) a^2, b^2 ともに 5 で割った余りが 4 であるとする、 c^2 を 5 で割った余りは 3 となり矛盾する。
- (iii) a^2, b^2 を 5 で割った余りの一方が 1 で他方が 4 であるとする、 c^2 を 5 で割った余りは 0 となり矛盾する。

したがって、どの場合でも矛盾するため、 a , b , c のいずれかは5の倍数である。

4.3 解説

- (2) 背理法で、 a , b がともに3の倍数でないパターンを列挙し、どれも矛盾を導けることで示しています。
- (3) 同じく背理法で、 a , b , c がいずれも5の倍数でないパターンを列挙し、どれも矛盾を導けることで示しています。

4.4 採点

【第4問 17点】

- (1) 5点
- (2) 6点
- (3) 6点

5 第5問：式と倍数

5.1 問題

n を自然数とする。

- (1) $n(n+1)(2n+1)$ は 6 の倍数であることを証明せよ。
- (2) $n^2(n+1)^2$ は 4 の倍数であることを証明せよ。
- (3) $n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$ は 30 の倍数であることを証明せよ。
- (4) $n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$ は 12 の倍数であることを証明せよ。

5.2 解答

次の事柄 (A) が言える。

- (A) n と $n+1$ は隣り合う自然数であり、一方は奇数、もう一方は偶数である。よって $n(n+1)$ は偶数すなわち 2 の倍数である。

- (1) すべての自然数は、整数 k を用いて $3k-2$, $3k-1$, $3k$ のいずれかで表される。それぞれを与式の n に代入して計算すると、

$$\begin{aligned}(3k-2)\{(3k-2)+1\}\{2(3k-2)+1\} &= 3(3k-2)(3k-1)(2k-1), \\ (3k-1)\{(3k-1)+1\}\{2(3k-1)+1\} &= 3k(3k-1)(6k-1), \\ (3k)\{(3k)+1\}\{2(3k)+1\} &= 3k(3k+1)(6k+1)\end{aligned}$$

であり、いずれも 3 の倍数であるため、与式は 3 の倍数である。また、(A) より、 $n(n+1)$ を因数に持つ与式は 2 の倍数である。したがって、与式 $n(n+1)(2n+1)$ は 6 の倍数である。

- (2) (A) より、 $n(n+1)$ の平方である $n^2(n+1)^2$ は 4 の倍数である。
- (3) すべての自然数は、整数 k を用いて $5k-4$, $5k-3$, $5k-2$, $5k-1$, $5k$ のいずれかで表される。 $5k-4$, $5k-3$, $5k-2$ を与式の n に代入して計算すると、

$$\begin{aligned}(5k-4)\{(5k-4)+1\}\{2(5k-4)+1\}\{3(5k-4)^2+3(5k-4)-1\} \\ = 5(5k-4)(5k-3)(10k-7)(15k^2-21k+7), \\ (5k-3)\{(5k-3)+1\}\{2(5k-3)+1\}\{3(5k-3)^2+3(5k-3)-1\} \\ = 5(5k-3)(5k-2)(2k-1)(75k^2-75k+17), \\ (5k-2)\{(5k-2)+1\}\{2(5k-2)+1\}\{3(5k-2)^2+3(5k-2)-1\} \\ = 5(5k-2)(5k-1)(10k-3)(15k^2-9k+1)\end{aligned}$$

となり、5 の倍数である。また、 $n=5k-1$ のときは与式の因数 $n+1$ が 5 の倍数で、 $n=5k$ のときは与式の因数 n が 5 の倍数であるため、与式は 5 の倍数である。以上より、すべての自然数 n で与式は 5 の倍数である。また、(1) より、 $n(n+1)(2n+1)$ を因数に持つ与式は 6 の倍数である。したがって、与式 $n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$ は 30 の倍数である。

- (4) (1) と同様に、自然数 n を $3k-2$, $3k-1$, $3k$ のいずれかで表す。 $n=3k$ のときは与式の

因数 n が 3 の倍数である。 $n = 3k - 1$ のときは与式の因数 $n + 1$ が 3 の倍数である。また、 $n = 3k - 2$ を $2n^2 + 2n - 1$ に代入して計算すると、

$$2(3k - 2)^2 + 2(3k - 2) - 1 = 3(6k^2 - 6k + 1)$$

となり、3 の倍数であるため、 $n = 3k - 2$ のときは与式の因数 $2n^2 + 2n - 1$ が 3 の倍数である。以上より、すべての自然数 n で与式は 3 の倍数である。また、(2) より $n^2(n + 1)^2$ を因数に持つ与式は 4 の倍数である。したがって、与式 $n^2(n + 1)^2(2n^2 + 2n - 1)$ は 12 の倍数である。

5.3 解説

(1)(3)(4)において、ある数 p の倍数であることをいうために、 $pm, pm + 1, \dots, pm + p - 1$ と n をおいていますが、こうすることで式に p が出てきて都合良く結論を導くことができました。

この問題は、整数を 2, 3, 4, 5 乗したものの和が

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n - 1)^2 + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n - 1)^3 + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + (n - 1)^4 + n^4 = \frac{1}{30}n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)$$

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + (n - 1)^5 + n^5 = \frac{1}{12}n^2(n + 1)^2(2n^2 + 2n - 1)$$

というような式で表されることが背景になっています。左辺は整数の和であるため整数、よって右辺も整数であるため、分数は約分できるから、本問のような主張ができます。

注意したいのは、例えばある式 A が 4 の倍数かつ 6 の倍数であるとき、 A はその積 24 の倍数とはいえないことです。4 と 6 の最小公倍数である 12 の倍数であるというのが正しいです。

5.4 採点

【第5問 19点】

- (1) 5点
- (2) 4点
- (3) 5点
- (4) 5点

6 第6問：命題論理

6.1 問題

正しいか正しくないかが明確に定まる文や式を「命題」という。命題 P が正しいとき、 P は真であるといい、その値を 1 と定める。 P が正しくないとき、 P は偽であるといい、その値を 0 と定める。 \top を常に 1 の値をとる命題とし、 \perp を常に 0 の値をとる命題とする。

4つの論理演算 \neg , \vee , \wedge , \rightarrow を次のように定める。

- \neg は「否定」と呼び、命題 P について、 $\neg P$ は「 P でない」を表す。
- \vee は「選言」と呼び、命題 P , Q について、 $P \vee Q$ は「 P または Q 」を表す。
- \wedge は「連言」と呼び、命題 P , Q について、 $P \wedge Q$ は「 P かつ Q 」を表す。
- \rightarrow は「含意」と呼び、命題 P , Q について、 $P \rightarrow Q$ は「 P ならば Q 」を表す。

命題と論理演算を用いて、次の規則 (i), (ii), (iii), (iv) によって「論理式」を定める。演算の順番が分かるように括弧 () を用いる場合がある。

- P を命題とすると、 P は論理式である。
- P を論理式とすると、 $\neg P$ は論理式である。
- P , Q を論理式とすると、 $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $P \rightarrow Q$ はいずれも論理式である。
- 以上 (i), (ii), (iii) で定められるものだけを論理式とする。

例えば、 P , Q , R を命題とすると、 $(P \vee Q) \rightarrow ((\neg R) \vee \top)$ は論理式であるが、 $\perp \rightarrow \rightarrow \rightarrow QR$ は論理式ではない。

命題あるいは論理式 P , Q のとる値によって、論理式 $\neg P$, $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $P \rightarrow Q$ がどのような値をとるか、次の表に示した。

表 6.1: $\neg P$ の値

P	$\neg P$
1	0
0	1

表 6.2: $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $P \rightarrow Q$ の値

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

例として、命題 P , Q , R について、 P が 1, Q が 0, R が 1 の値をとるときの

$$((\neg P) \vee Q) \rightarrow (R \wedge P)$$

の値について考える。 P の値が 1 であるから $\neg P$ の値は 0 である。よって $(\neg P) \vee Q$ は \vee の左側の値が 0, 右側の値が 0 であるから、全体としての値は 0 である。 P と R の値がどちらも 1 であるから、 $R \wedge P$ の値は 1 である。したがって、例の式は \rightarrow の左側の値が 0, 右側の値が 1 であるから、式全体の値は 1 である。

\top と \perp 以外の各命題がそれぞれ 0 と 1 どちらの値をとっても、2つの論理式の値が等しいとき、

それらは「同値」であるという。例えば、 $P \rightarrow Q$ と $(\neg P) \vee Q$ は同値である。

以下では、 $(P \vee Q) \vee R$ と $P \vee (Q \vee R)$ は同値であるため、括弧を省略して $P \vee Q \vee R$ と表記する場合がある。同様に、 $(P \wedge Q) \wedge R$ と $P \wedge (Q \wedge R)$ は同値であるため、 $P \wedge Q \wedge R$ と表記する場合がある。

- (1) P, Q, R を命題とするとき、次の2つの記述 (I), (II) について、それぞれ論理式であるかそうでないかを答えよ。

$$(I) \quad (((\neg P) \rightarrow Q) \vee \perp) \wedge ((R \rightarrow ((\neg P) \vee Q)) \rightarrow P)$$

$$(II) \quad (((\neg P) \rightarrow Q^2) \rightarrow R) \vee (Q \approx R)$$

- (2) P, Q, R を命題とする。次の論理式 (I), (II) それぞれについて、 P の値が1, Q の値が0, R の値が1であるときの論理式の値を求めよ。

$$(I) \quad ((\neg P) \rightarrow Q) \wedge (R \vee ((Q \wedge R) \rightarrow \top))$$

$$(II) \quad (Q \rightarrow (\perp \vee P \vee R)) \rightarrow ((\neg R) \wedge \top)$$

- (3) P, Q を命題とする。 $P \rightarrow Q$ と $(\neg P) \vee Q$ が同値であることを、表 6.2 にならって表を作ることで確かめよ。さらに、 $P \rightarrow Q$ の対偶である $(\neg Q) \rightarrow (\neg P)$ がそれら2つと同値であることを、同様にして確かめよ。

- (4) P, Q を命題とする。次の4つの論理式 (I), (II), (III), (IV) のうち、 $P \vee Q$ と同値であるものをすべて挙げよ。

$$(I) \quad (\neg P) \wedge Q \wedge (P \rightarrow Q)$$

$$(II) \quad ((\neg P) \vee Q) \rightarrow Q$$

$$(III) \quad (Q \rightarrow P) \rightarrow (\neg(\neg P))$$

$$(IV) \quad Q \vee ((\neg P) \wedge Q) \vee (P \rightarrow Q)$$

- (5) P, Q を命題とする。次の4つの論理式 (I), (II), (III), (IV) のうち、 P と Q のとる値によらず常に1の値をとる論理式をすべて挙げよ。

$$(I) \quad (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$$

$$(II) \quad (P \vee (\neg Q)) \vee (P \rightarrow Q)$$

$$(III) \quad (Q \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow (\neg P))$$

$$(IV) \quad (Q \rightarrow ((Q \vee P) \wedge P)) \rightarrow ((\neg Q) \vee (Q \rightarrow P))$$

6.2 解答

- (1) (I) は、提示された規則を適用することで生成できるため、論理式である。(II) については、提示された規則からは Q^2 や $Q \approx R$ という表現は出てこないため、論理式ではない。
- (2) 論理式 A のとる値を $v(A)$ と表す。 $k = 0, 1$ に対し、値 k をとることが分かった論理式を p_k と書き表し、論理式を簡略化する過程を示す。

(I)

$$\begin{aligned}
& ((\neg P) \rightarrow Q) \wedge (R \vee ((Q \wedge R) \rightarrow \top)) \\
& (p_0 \rightarrow Q) \wedge (R \vee ((Q \wedge R) \rightarrow \top)) \quad (\because v(\neg P) = 0) \\
& p_1 \wedge (R \vee ((Q \wedge R) \rightarrow \top)) \quad (\because v(p_0 \rightarrow Q) = 1) \\
& p_1 \wedge (R \vee (p_0 \rightarrow \top)) \quad (\because v(Q \wedge R) = 0) \\
& p_1 \wedge (R \vee p_1) \quad (\because v(p_0 \rightarrow \top) = 1) \\
& p_1 \wedge p_1 \quad (\because v(R \vee p_1) = 1) \\
& p_1
\end{aligned}$$

与えられた命題の値において、この論理式の値は1である。

(II)

$$\begin{aligned}
& (Q \rightarrow (\perp \vee P \vee R)) \rightarrow ((\neg R) \wedge \top) \\
& (Q \rightarrow p_1) \rightarrow ((\neg R) \wedge \top) \quad (\because v(\perp \vee P \vee R) = 1) \\
& p_1 \rightarrow ((\neg R) \wedge \top) \quad (\because v(Q \rightarrow p_1) = 1) \\
& p_1 \rightarrow (p_0 \wedge \top) \quad (\because v(\neg R) = 0) \\
& p_1 \rightarrow p_0 \quad (\because v(p_0 \wedge \top) = 0) \\
& p_0
\end{aligned}$$

与えられた命題の値において、この論理式の値は0である。

- (3) 表を作成すると次のようになる。 P 、 Q の値に依らず、それぞれの論理式は同じ値をとるため、これらはすべて同値である。

P	Q	$P \rightarrow Q$	$(\neg P) \vee Q$	$(\neg Q) \rightarrow (\neg P)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

- (4) 表を作成すると次のようになる。 $P \vee Q$ と同値であるものは、(II)と(III)である。

P	Q	$P \vee Q$	(I)	(II)	(III)	(IV)
1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1

- (5) 表を作成すると次のようになる。常に1の値をとるものは、(I)と(II)と(IV)である。

P	Q	(I)	(II)	(III)	(IV)
1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

6.3 解説

論理式も、四則演算のように計算することができます。本問はそのことに焦点を当てて、論理式を計算する問題を課しています。

表 6.1, 6.2 を解釈すると、次のように表現することができます。

- \neg (否定) は、それがついた論理式のとる値 (0, 1) を反転させる。
- \wedge (かつ) は、左右の値がともに 1 のときのみ 1 を、それ以外のときは 0 をとる。
- \vee (または) は、左右の値の少なくとも一方が 1 をとれば 1 を、どちらも 0 の場合は 0 をとる。
- \rightarrow (ならば) は、左が 1, 右が 0 のときのみ 0 を、それ以外の場合は 1 をとる。

特に注意したいのは、 \rightarrow は、左側の論理式の値が 0 であれば、右によらず常に 1 をとることです。これについて例を挙げると、次のようなものがあります。

- n を自然数とすると、 $n^2 + 4 = 0$ ならば $n = 3$ である」は真である。

n が自然数であるという前提では、 $n^2 + 4 = 0$ とはなり得ません。よって \rightarrow の左側が偽となり、「」の中身全体は真となります。あくまで「」の中身全体として真とだけあり、 \rightarrow の右側、「 $n = 3$ である」が真であるとは述べていないことに注意が必要です。

(3) は 3 つの論理式が全て同じ値をとるという結論が問題より分かっているため、横着して表を作成することもできますが、それぞれよく確かめてみてください。 $P \rightarrow Q$ が $(\neg P) \vee Q$ と同値であることは、 \rightarrow を論理式から除去したいときに使えます。

(4)(5) については (2) と同様の計算を、 P, Q がそれぞれ 0, 1 をとる 4 パターンについて行います。(4) では、 $P \vee Q$ と違う値をとるパターンを 1 つ見つけられれば、全てのパターンを試さず同値でないことを結論づけることができます。

常に 1 の値をとる論理式を恒真式、常に 0 の値をとる論理式を恒偽式、それ以外の、0 も 1 もとりうる論理式を事実式といいます。(5) では、恒真式を探しています。

本問では \top と \perp を命題として定義していますが、どちらかという論理式として定義されることが多いです。

6.4 採点

【第 6 問 18 点】

(1) 4 点

- (I) と (II) それぞれに 2 点。

(2) 4 点

- (I) と (II) それぞれに 2 点。
- (3) 3 点
- (4) 3 点
- (5) 4 点