確　認　試　験　問　題

確　率

解　答　例　・　解　説

試験時間：90 分

問題数：5 問

配点：100 点

最終改訂日：2026/03/28

1　第 1 問：確率の基本

1.1　問題

以下の各問いにそれぞれ答えよ。

(1)　1，2，3，4，5 のうち 1 つが表示される電光掲示板がある。ある時刻では，1 が表示される確率が $\frac{1}{15}$，2 が表示される確率が $\frac{2}{15}$，3 が表示される確率が $\frac{1}{5}$，4 が表示される確率が $\frac{4}{15}$，5 が表示される確率が $\frac{1}{3}$ である。ある時刻に，この電光掲示板に偶数が表示される確率を求めよ。

(2)　仮想世界 A では，晴れの確率が $\frac{2}{3}$，雨の確率が $\frac{1}{3}$ である。仮想世界 B では，晴れの確率が $\frac{5}{7}$，雨の確率が $\frac{2}{7}$ である。仮想世界 C では，晴れの確率が $\frac{1}{4}$，雨の確率が $\frac{3}{4}$ である。それぞれの仮想世界の天候は異なる仮想世界の天候に影響を及ぼさないとするとき，仮想世界 C のみ雨である確率を求めよ。

(3)　A，K，Q，J，10 が 1 つずつ書かれた計 5 枚のカードがある。これらを等確率で選び左からすべて並べていくとき，左から J，Q，K が連なる並びが現れる確率を求めよ。例えば，A，J，Q，K，10 と並ぶ場合は対象となる並び方であるが，J，10，Q，K，A や A，J，K，Q，10 と並ぶ場合は対象とならない並び方である。

(4)　1 以上 100 以下の 100 個の整数から等確率で整数を 1 つ選ぶ。このとき，選んだ整数が 3 か 5 で割り切れる確率を求めよ。

(5)　10 個の箱と 5 個のボールがある。10 個の箱から等確率で 1 個を選んでボールを 1 個入れるという操作を 5 回繰り返す。このとき，どの箱にも 2 個以上のボールが入っていない確率を求めよ。

1.2　解答

(1)　電光掲示板に偶数が表示される事象は，2 が表示されるか，4 が表示されるかである。それぞれの確率は $\frac{2}{15}$，$\frac{4}{15}$ である。これらの事象は排反であるから，どちらかが起こる確率は $\frac{2}{15}+\frac{4}{15}=\frac{2}{5}$ である。

(2)　仮想世界 A が晴れ，仮想世界 B が晴れ，仮想世界 C が雨の確率は，それぞれ $\frac{2}{3}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{3}{4}$ である。これらの事象は独立であるから，全てが同時に起こる確率は，$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{4}=\frac{5}{14}$ である。

(3)　この 5 枚のカードを並べる場合の数は $5!=120$ 通りであり，全て等確率で起こる。左から J，Q，K が連なる並べ方を考えると，この 3 つを一つの塊 JQK と見て，A，JQK，10 の 3 枚を並べる場合の数を考えれば良く，それは $3!=6$ 通りである。したがって，求めるべき確率は $\frac{6}{120}=\frac{1}{20}$ である。

(4)　1 以上 100 以下の整数のうち，3 か 5 の倍数であるものを数える。3 の倍数であるものは $3\cdot1, 3\cdot2, \ldots, 3\cdot33$ の 33 個，5 の倍数は $5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \ldots, 5\cdot20$ の 20 個。このうち重複しているものは 15 の倍数で，$15\cdot1, 15\cdot2, \ldots, 15\cdot6$ の 6 個。よって 3 か 5 の倍数であるものは

$33+20-6=47$ 個。ゆえに，全体から整数を選んだとき，3 か 5 の倍数である確率は $\dfrac{47}{100}$ である。

(5) ボールと箱を区別する。5 回の操作に対してそれぞれ 10 通りの入れ方があるため，全体の場合は 10^5 通りである。どの箱にも 2 個以上のボールが入らない場合は，10 個の箱の中から異なる 5 個を選んで順番にボールを入れる場合と考え，${}_{10}\mathrm{P}_5$ 通りである。よって，求めるべき確率は

$$\frac{{}_{10}\mathrm{P}_5}{10^5}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{10^5}=\frac{189}{625}$$

である。

1.3　解説

(1) 排反な事象（同時には起こり得ない事象）のいずれかが起きる確率は，各確率の和となります。

(2) 独立な事象（それぞれが他に影響を及ぼさない事象）の全てが起きる確率は，各確率の積となります。

1.4　採点

【第 1 問　20 点】

(1) 4 点

(2) 4 点

(3) 4 点

(4) 4 点

(5) 4 点

2　第 2 問：復元抽出と非復元抽出

2.1　問題

赤の球 2 個，黄色の球 3 個，青の球 4 個，緑の球 5 個がある。球を袋に入れ，無作為に袋から球を取り出し，その色を記録する操作を行う。4 色 14 個の球がすべて袋の中に入っており，記録が何もされていない状態を初期状態と呼ぶことにする。袋から球を無作為に取り出すとき，どの球も等確率で取り出されるものとする。また，次のように操作 P，Q を定める。

操作 P：　袋から球を無作為に 1 個取り出し，その色を記録して袋に戻す。

操作 Q：　袋から球を無作為に 1 個取り出し，その色を記録する。球は取り出したまま袋に戻さない。

(1)　初期状態から操作 P を 5 回行う。このとき，4 色すべてが記録されている確率を求めよ。

(2)　初期状態から操作 P を 3 回行う。このとき，ちょうど 1 色のみ記録されている確率を求めよ。

(3)　初期状態から操作 Q を 4 回行う。このとき，4 色すべてが記録されている確率を求めよ。

(4)　初期状態から操作 Q を 7 回行う。このとき，ちょうど 2 色のみ記録されている確率を求めよ。

2.2　解答

操作 P において，赤の球が出る確率は $\dfrac{1}{7}$，黄色の球が出る確率は $\dfrac{3}{14}$，青の球の出る確率は $\dfrac{2}{7}$，緑の球の出る確率は $\dfrac{5}{14}$ である。また，操作 Q を n 回行うことは，袋から同時に n 個の球を取り出す操作と同等とみなせる。

なお，下記ではある色の球をその色の名前で呼ぶ場合があり，黄色は黄とも表記する。

(1)　4 色のうち，1 色が 2 回，残りの 3 色が 1 回ずつ出ることを考えれば良い。

(i)　赤が 2 回出る場合を考える。色の出る順番は，赤赤黄青緑の並び方を考えて $\dfrac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3$ 通り。よって，題意を満たすもののうち，赤が 2 回出る場合の確率 p_r は

$$p_r = (5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{14} = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{7^5}$$

である。

(ii)　(i) と同様に考えて，黄，青，緑が 2 回出る場合の確率を求める。色の出る順番は等しく $5 \cdot 4 \cdot 3$ 通りであるから，黄が 2 回出る確率 p_y は

$$p_y = (5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{3}{14}\right)^2 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{14} = \frac{3^3 \cdot 5^2}{7^5}$$

青が 2 回出る確率 p_b は

$$p_b = (5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{14} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^2 \cdot \frac{5}{14} = \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{7^5}$$

緑が 2 回出る確率 p_g は

$$p_g = (5\cdot4\cdot3)\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{14}\cdot\frac{2}{7}\cdot\left(\frac{5}{14}\right)^2 = \frac{3^2\cdot5^3}{7^5}$$

である。

これらは排反であるから，いずれかが起こる確率は

$$p_r+p_y+p_b+p_g = \frac{3^2\cdot5^2\cdot(2+3+2^2+5)}{7^5} = \frac{2\cdot3^2\cdot5^2}{7^4} = \frac{450}{2401}$$

である。

(2) それぞれの色について，同じ色が 3 回出る場合の確率を考える。3 回とも赤が出る確率は $\left(\frac{1}{7}\right)^3$ である。同様に考え，黄が 3 回出る確率は $\left(\frac{3}{14}\right)^3$，青が 3 回出る確率は $\left(\frac{2}{7}\right)^3$，緑が 3 回出る確率は $\left(\frac{5}{14}\right)^3$ である。これらは排反であるため，いずれかが起こる確率は

$$\left(\frac{1}{7}\right)^3+\left(\frac{3}{14}\right)^3+\left(\frac{2}{7}\right)^3+\left(\frac{5}{14}\right)^3 = \frac{2^3+3^3+4^3+5^3}{14^3} = \frac{4}{49}$$

である。

(3) 球は同じ色でも全て区別して考える。14 個の球から 4 個を取り出す場合は ${}_{14}\mathrm{C}_4 = 7\cdot11\cdot13$ 通り。赤を 1 個, 黄を 1 個, 青を 1 個, 緑を 1 個取り出す場合は, ${}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1 = 2^3\cdot3\cdot5$ 通り。よって求めるべき確率は,

$$\frac{2^3\cdot3\cdot5}{7\cdot11\cdot13} = \frac{120}{1001}$$

である。

(4) 引き続き，同じ色の球も区別して考える。7 個の球の取り出し方は ${}_{14}\mathrm{C}_7$ 通り。その中で，色が 2 種類であったとき，考えられる色の組み合わせは，赤と緑，黄と青，黄と緑，青と緑である。

(i) 赤と緑が出る場合，個数は赤 2 個と緑 5 個の場合のみで，その組み合わせは ${}_2\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{C}_5 = 1$ 通りである。

(ii) 黄と青が出る場合，個数は黄 3 個と青 4 個の場合のみで，その組み合わせは ${}_3\mathrm{C}_3\cdot{}_4\mathrm{C}_4 = 1$ 通りである。

(iii) 黄と緑が出る場合，個数は黄 3 個と緑 4 個か，黄 2 個と緑 5 個の場合がある。前者の取り方は ${}_3\mathrm{C}_3\cdot{}_5\mathrm{C}_4 = 5$ 通り，後者の取り方は ${}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{C}_5 = 3$ 通り。

(iv) 青と緑が出る場合，個数は青 2 個と緑 5 個か，青 3 個と緑 4 個，青 4 個と緑 3 個の場合がある。一つ目の取り方は ${}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{C}_5 = 6$ 通り。二つ目の取り方は ${}_4\mathrm{C}_3\cdot{}_5\mathrm{C}_4 = 20$ 通り。三つ目の取り方は ${}_4\mathrm{C}_4\cdot{}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通り。

これらは全て排反であるから，これらが起こる確率は

$$\frac{1+1+5+3+6+20+10}{{}_{14}\mathrm{C}_7} = \frac{23}{1716}$$

である。

2.3　解説

取り出したものを毎回もとに戻しながら取り出す操作を復元抽出，取り出したものをもとに戻さないうえで取り出す操作を非復元抽出といいます。操作 P が復元抽出，操作 Q が非復元抽出に該当します。

(3)(4) では，n 回取り出す非復元抽出は，同時に n 個取り出すことと同じとみなして計算しています。

2.4　採点

【第 2 問　20 点】

(1)　5 点

(2)　5 点

(3)　5 点

(4)　5 点

3　第 3 問：反復試行の確率

3.1　問題

1 から 6 までの目が等確率で出るさいころを n 回投げる。出た n 個の目すべての積を A とする。

(1)　A が 5 の倍数である確率を求めよ。

(2)　A が 15 の倍数である確率を求めよ。

(3)　A が 2 の倍数であるが，4 の倍数ではない確率を求めよ。

(4)　A が 9 の倍数である確率を求めよ。

3.2　解答

事象 X が起こる確率を $P(X)$ と表す。

(1)　さいころの目で 5 の倍数は 5 のみだから，5 が少なくとも 1 回出た場合のみ，A は 5 の倍数となる。この事象を B とする。B の余事象である，5 の目が一度も出ない事象の確率は $\left(\frac{5}{6}\right)^n$ だから，$P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ である。

(2)　A が 3 の倍数である事象を C とすると，その余事象は 3 の倍数の目 (3,6) が一度も出ないことで，その確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ だから，$P(C) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ である。次に，A が 3 の倍数か 5 の倍数である事象 $B \cup C$ を考える。この余事象は，さいころの目の 1,2,4 いずれかが出続ける確率で $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。よって，$P(B \cup C) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。A が 15 の倍数である事象は $B \cap C$ だから，その確率は

$$P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(B \cup C) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

である。

(3)　A が 2 の倍数であるが 4 の倍数ではない事象は，1 回だけ 2 か 6 が出て，残り $n-1$ 回は奇数が出ることである。2 か 6 が出る確率は $\frac{1}{3}$，奇数が出る確率は $\frac{1}{2}$ であり，2 か 6 が何番目に出るか ${}_n\mathrm{C}_1 = n$ 通りあるため，この事象の確率は

$$n \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

である。

(4)　A が 9 の倍数である事象の余事象を考えると，A が 3 の倍数でないか，A が 3 の倍数であるが 9 の倍数でない事象である。

(i)　A が 3 の倍数でない事象は，さいころが 1,2,4,5 のいずれかを出し続ける場合に起き，その確率は $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ である。

(ii)　A が 3 の倍数であるが 9 の倍数でない事象は，3 か 6 が 1 回だけ出て，それ以外は全て 1,2,4,5 のいずれかが出る場合に起きる。3 か 6 が n 回のうちどこで出るか，${}_n\mathrm{C}_1 = n$ 通

りあることを考えると，この事象の確率は

$$n \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{n \cdot 2^{n-1}}{3^n}$$

である。

これらは排反であるから，どちらかが起きる確率はその和をとって

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + \frac{n \cdot 2^{n-1}}{3^n} = \frac{(n+2) \cdot 2^{n-1}}{3^n}$$

となり，余事象の確率を得る。ゆえに，求めるべき確率は

$$1 - \frac{(n+2) \cdot 2^{n-1}}{3^n}$$

である。

3.3　解説

独立な試行を何回も繰り返すことを反復試行といいます。

(1)(2)(4) では余事象の確率をを考えることで，元の事象の確率を求めています。何回もさいころを振って掛け算を実行していると，どんどん約数が増えていくため，特定の数の倍数でないパターンのほうが限定的になるため，その少ないパターンを考えるほうが求めやすいためです。

(2) で言及していますが，一般に，事象 X と事象 Y があり，X が起こる確率を $P(X)$，Y が起こる確率を $P(Y)$，X と Y の少なくとも一方が起きる確率を $P(X \cup Y)$，X と Y がどちらも起きる確率を $P(X \cap Y)$ とするとき，

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y),$$
$$P(X \cap Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cup Y)$$

が成り立ちます。これは，場合の数を考えていたときと同じ考え方ができるということです。上の 2 式は，片方を式変形すればもう一方が得られます。

3.4　採点

【第 3 問　20 点】

(1)　5 点

(2)　5 点

(3)　5 点

(4)　5 点

4　第 4 問：確率と期待値

4.1　問題

1，2，3，4，5，6，7，8，9，10 が書かれたカードが 1 枚ずつある。この 10 枚の中から 7 枚を等確率で選ぶ。選んだカードに書かれた数の最大値を M，2 番目に大きい数を S，最小値を m とする。

(1)　$M-m=6$ となる確率を求めよ。

(2)　M の期待値を求めよ。

(3)　m の期待値を求めよ。

(4)　S の期待値を求めよ。

4.2　解答

全体の取り出し方は ${}_{10}\mathrm{C}_7=120$ 通りある。以下では，a から b までの連続する自然数を a〜b と表記する。

(1)　$M-m=6$ となる取り出し方は，取り出した 7 枚が連続する自然数である場合のみで，それらを具体的に挙げると 1〜7，2〜8，3〜9，4〜10 の 4 通りである。よって，これらが起こる確率は

$$\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$$

である。

(2)　M が最も小さくなるのは 1〜7 を選ぶ場合で $M=7$，最も大きくなるのは 10 を選ぶ場合で $M=10$．よって $7\leqq M\leqq 10$ について考えれば網羅できる。

(i)　$M=7$ となる場合は，1〜7 を選ぶ 1 通りのみ。

(ii)　$M=8$ となる場合は，まず 8 を選び，1〜7 から残りの 6 枚を選ぶ場合で，${}_7\mathrm{C}_6=7$ 通り。

(iii)　$M=9$ となる場合は，まず 9 を選び，1〜8 から残りの 6 枚を選ぶ場合で，${}_8\mathrm{C}_6=28$ 通り。

(iv)　$M=10$ となる場合は，それら以外だから，$120-1-7-28=84$ 通り。

ゆえに，M の期待値は

$$\frac{1}{120}\cdot 7+\frac{7}{120}\cdot 8+\frac{28}{120}\cdot 9+\frac{84}{120}\cdot 10=\frac{77}{8}$$

である。

(3)　m が最も小さくなる場合は 1 を選ぶ場合で $m=1$，m が最も大きくなるのは 4〜10 を選ぶ場合で $m=4$．よって $1\leqq m\leqq 4$ について考えれば網羅できる。

(i)　$m=4$ となる場合は，4〜10 を選ぶ 1 通りのみ。

(ii)　$m=3$ となる場合は，まず 3 を選び，4〜10 から残りの 6 枚を選ぶ場合で，${}_7\mathrm{C}_6=7$ 通り。

(iii)　$m=2$ となる場合は，まず 2 を選び，3〜10 から残りの 6 枚を選ぶ場合で，${}_8\mathrm{C}_6=28$ 通り。

(iv)　$m=1$ となる場合は，それら以外だから，$120-1-7-28=84$ 通り。

ゆえに，m の期待値は

$$\frac{1}{120}\cdot 4+\frac{7}{120}\cdot 3+\frac{28}{120}\cdot 2+\frac{84}{120}\cdot 1=\frac{11}{8}$$

である。

(4)　S として考えられる最小は，例えば 1〜7 を選ぶときの $S=6$ で，最大は例えば 4〜10 を選ぶときの $S=9$ である。よって $6\leqq S\leqq 9$ について考えれば網羅できる。

(i)　$S=6$ となる場合は，1〜6 全てと，7〜10 から 1 枚を選ぶ場合で，${}_4\mathrm{C}_1=4$ 通り。

(ii)　$S=7$ となる場合は, 1〜6 から 5 枚と, 7 と, 8〜10 から 1 枚を選ぶ場合で, ${}_6\mathrm{C}_5\cdot{}_3\mathrm{C}_1=18$ 通り。

(iii)　$S=8$ となる場合は, 1〜7 から 5 枚と, 8 と, 9〜10 から 1 枚を選ぶ場合で, ${}_7\mathrm{C}_5\cdot{}_2\mathrm{C}_1=42$ 通り。

(iv)　$S=9$ となる場合は，それら以外だから，$120-4-18-42=56$ 通り。

ゆえに，S の期待値は

$$\frac{4}{120}\cdot 6+\frac{18}{120}\cdot 7+\frac{42}{120}\cdot 8+\frac{56}{120}\cdot 9=\frac{33}{4}$$

である。

4.3　解説

確率的な試行を行うときの，得られる値の平均値を期待値といい，得られる値とその確率の積を足し合わせることで計算します。

(2) と (3) では, 似たような数え上げになっています。実際 (3) では, 対称性を考えると, 1〜10 の平均値が $5.5=\dfrac{11}{2}$, 最大値の期待値が $\dfrac{77}{8}$ で $\dfrac{33}{8}$ 離れているため, 最小値の期待値は $\dfrac{11}{2}-\dfrac{33}{8}=\dfrac{11}{8}$ と求めることもできます。これは，1 から 10 までの数値が等間隔で並んでいることと，どれも同じ確率で選択するために考えられるため，たとえばカードの値が違う値になって等間隔に並ばなくなったり，どれかが別の確率で選択されるようになると対称性が崩れ，この方法では求められなくなります。

4.4　採点

【第 4 問　20 点】

(1)　3 点

(2)　5 点

(3)　5 点

(4)　7 点

5　第 5 問：点の移動と確率

5.1　問題

座標平面上の点 P $(x,\ y)$ が次の規則に従って動くとする。

(i)　時刻 0 のとき，点 P は原点 O にある。

(ii)　t を 0 以上の整数とする。時刻 t のときに点 P が $(m,\ n)$ にあるとき，時刻 $t+1$ の点 P は，次の 4 つのうちいずれかに動く。

- $(m+1,\ n)$ に移動する確率は $\dfrac{1}{3}$ である。
- $(m-1,\ n)$ に移動する確率は $\dfrac{1}{3}$ である。
- $(m,\ n+1)$ に移動する確率は $\dfrac{1}{6}$ である。
- $(m,\ n-1)$ に移動する確率は $\dfrac{1}{6}$ である。

(1)　時刻 5 のときに，点 P が x 軸上にある確率を求めよ。

(2)　時刻 6 のときに，点 P が直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

(3)　時刻 4 のときに，点 P が原点 O にある確率を求めよ。

5.2　解答

点 $(m,\ n)$ に対して，点 $(m+1,\ n)$ を右，点 $(m-1,\ n)$ を左，点 $(m,\ n+1)$ を上，点 $(m,\ n-1)$ を下と呼ぶ。また，上と下をあわせて縦，左と右を合わせて横と呼ぶ。縦に移動する確率は $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$，横に移動する確率は $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ である。

(1)　P が x 軸上にある，すなわち P の y 座標の値が 0 である事象は，上への移動回数と下への移動回数が等しいときに限り起こる。

(i)　上と下へそれぞれ 2 回ずつ移動する場合を考える。この場合は横に 1 回移動する。上上下下横の並び方を考えると $\dfrac{5!}{2!\cdot 2!}$ 通りあるため，これが起きる確率は

$$\frac{5!}{2!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{2^2\cdot 3^4}$$

である。

(ii)　上と下へそれぞれ 1 回ずつ移動する場合を考える。この場合は横に 3 回移動する。上下横横横の並び方を考えると $\dfrac{5!}{3!}$ 通りあるため，これが起きる確率は

$$\frac{5!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{40}{3^5}$$

である。

(iii)　上と下へ一度も移動しない場合を考える。この場合は横に 5 回移動する。この確率は

$\left(\frac{2}{3}\right)^5$ である。

これらは全て排反であるから，これらが起こる確率は

$$\frac{5}{2^2 \cdot 3^4} + \frac{40}{3^5} + \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{3 \cdot 5 + 2^2 \cdot 40 + 2^2 \cdot 2^5}{2^2 \cdot 3^5} = \frac{101}{324}$$

である。

(2)　P の x 座標と y 座標が等しいときに，P が $y = x$ 上にある。左か上への移動を U，右か下への移動を D とすると，U と D の回数が等しいときに，P の x 座標と y 座標は等しくなる。U と D それぞれの移動確率は $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ である。動く順番は UUUDDD の並び替えで，${}_6\mathrm{C}_3$ 通り。よって，これが起きる確率は

$$ {}_6\mathrm{C}_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

である。

(3)　左への移動と右への移動の回数が等しく，かつ上への移動と下への移動の回数が等しいとき，P は原点 O にある。

(i)　上下左右それぞれに 1 回ずつ移動する場合，順番は 4! 通りあるから，これが起きる確率は

$$4! \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3^3}$$

である。

(ii)　上下それぞれに 2 回ずつ移動する場合，順番は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りあるから，これが起きる確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6^3}$$

である。

(iii)　左右それぞれに 2 回ずつ移動する場合，順番は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りあるから，これが起きる確率は

$$ {}_4\mathrm{C}_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3^3}$$

である。

これらは全て排反であるから，これらが起きる確率は

$$\frac{2}{3^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{2}{3^3} = \frac{2 \cdot 2^3 + 1 + 2 \cdot 2^3}{6^3} = \frac{11}{72}$$

である。

5.3　解説

(2)　$y = x$ 上にあるというのを，$y - x = 0$ が成り立つというように解釈して，$y - x$ の値がそれぞれの動きでどのように変化するかを考えます。

- 上へ動くとき，y が 1 増加するため，$y - x$ は 1 増加，
- 下へ動くとき，y が 1 減少するため，$y - x$ は 1 減少，
- 左へ動くとき，x が 1 減少するため，$y - x$ は 1 増加，
- 右へ動くとき，x が 1 増加するため，$y - x$ は 1 減少。

最初は原点にいて $y-x$ の値は 0 のため，増加の数と減少の数が一致するとき，$y-x=0$ が維持されます。よって上か左へ動く回数と，下か右へ動く回数が等しいときに，これが成り立ちます。

5.4　採点

【第 5 問　20 点】

(1)　7 点

(2)　6 点

(3)　7 点