
確 認 試 験 問 題
場 合 の 数

解 答 例 ・ 解 説

試験時間：90分

問題数：6問

配点：100点

最終改訂日：2026/02/27

1 第1問：集合と要素の数

1.1 問題

問い A, B, C に答えよ。

A

- (1) 100 以下の自然数のうち, 3 の倍数であるものの個数を求めよ。
- (2) 100 以下の自然数のうち, 5 の倍数であるものの個数を求めよ。
- (3) 100 以下の自然数のうち, 3 の倍数か 5 の倍数の少なくとも一方に当てはまるものの個数を求めよ。
- (4) 100 以下の自然数のうち, 3 の倍数でも 5 の倍数でもないものの個数を求めよ。
- (5) 100 以下の自然数のうち, 3 の倍数ではあるが, 5 の倍数ではないものの個数を求めよ。

B

有限集合 U とその部分集合 A, B があり, U の要素の個数は 128, A の要素の個数は 55, B の要素の個数は 36 である。このとき, $A \cap B$, $A \cup B$ の要素の個数がとりうる値の範囲を求めよ。

C

集合 A において, A の部分集合全体の集合を 2^A と表す。すなわち,

$$2^A = \{X \mid X \subset A\}$$

である。例えば, $P = \{1, 2, 3\}$ とするとき,

$$2^P = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

であり, 2^P の要素の個数は 8 個である。ただし, \emptyset は空集合を表す。有限集合 U の要素の個数を $|U|$ で表すとき, 有限集合 A について

$$|2^A| = 2^{|A|}$$

が成り立つことを説明せよ。

1.2 解答

有限集合 X の要素の個数を $|X|$ と表す。

A

100 以下の自然数全体を U , そのうち 3 の倍数の集合を A , 5 の倍数の集合を B とする。

- (1) A の要素を並べると,

$$3 \cdot 1, 3 \cdot 2, \dots, 3 \cdot 33$$

となり、その個数は $|A| = 33 - 1 + 1 = 33$ である。

- (2) B の要素を並べると、

$$5 \cdot 1, 5 \cdot 2, \dots, 5 \cdot 20$$

となり、その個数は $|B| = 20 - 1 + 1 = 20$ である。

- (3) $A \cap B$ は、3の倍数でも5の倍数でもあるもの、すなわち15の倍数であるもので、 $A \cap B$ の要素を並べると、

$$15 \cdot 1, 15 \cdot 2, \dots, 15 \cdot 6$$

となり、その個数は $|A \cap B| = 6$ である。求めるべきは、

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 33 + 20 - 6 = 47$$

である。

- (4) 3の倍数でも5の倍数でもないものの集合は $\overline{A \cup B}$ であり、その個数は

$$|\overline{A \cup B}| = |U| - |A \cup B| = 100 - 47 = 53$$

である。

- (5) 3の倍数ではあるが5の倍数でないものの集合 $A \cap \overline{B}$ は、 A から $A \cap B$ を除いたものである。その個数は

$$|A \cap \overline{B}| = |A| - |A \cap B| = 33 - 6 = 27$$

である。

B

$|A \cap B|$ が最も大きくなるのは、 $A \supset B$ のときの、 $|A \cap B| = |B| = 36$ である。最も小さくなるのは、 A と B に共通する要素が無いときに、 $|U| > |A| + |B|$ であるためこれは実現しうる。このとき要素の個数は0である。この間の個数は全てあり得るため、 $|A \cap B|$ のとりうる範囲は

$$0 \leq |A \cap B| \leq 36$$

である。

$|A \cup B|$ が最も大きくなるのは、 A と B に共通する要素が無いときに、これは実現しうる。このとき $|A \cup B| = 55 + 36 = 91$ である。最も小さくなるのは、 $A \supset B$ のとき、 $|A \cup B| = 55$ である。この間の個数は全てあり得るため、 $|A \cup B|$ のとりうる範囲は

$$55 \leq |A \cup B| \leq 91$$

である。

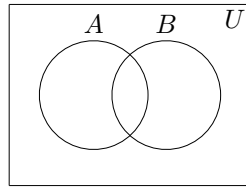
C

有限集合 A の部分集合 B の作り方は、 A の $|A| = n$ 個の各要素に対し、それを B に入れるか入れないかの2通りを考えられるため、組み合わせとして全部で 2^n 通りある。したがって、 2^A の要素数は 2^n であり、これを式で表すと

$$|2^A| = 2^{|A|}$$

である。

1.3 解説



ベン図を描くと、各部分の要素数の関係式が可視化されます。次の式は有用ですし、毎回ベン図を描いてもいられないため覚えておきましょう。片方の式の一部を移項すればもう片方が得られるため、一つだけ覚えれば十分です。

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$

A 個数の数え方に注意しましょう。例えば、 $1, 2, 3, \dots, 100$ と並んでいる数の個数は、 $100 - 1 = 99$ ではなく、 $100 - 1 + 1 = 100$ 個です。

B 状況を掴みにくい場合はベン図を描いてみるとよいでしょう。

C 風変わりな問題ですが、解答の通り、簡潔に説明できます。似た問題を次に提示しますので、考えてみてください。

【問】 n 人の人がいる。この中から適当な人数を選んでグループを作るとき、その人員の組み合わせは何通りあるか。ただし、0人のグループも認める。

【解】 n 人の各人について、その人をグループに入れるか入れないかの2通りが考えられるため、全部で 2^n 通りある。

1.4 採点

【第1問 19点】

A 各設問について、完答で得点とする。

- (1) 2点
- (2) 2点
- (3) 2点
- (4) 2点
- (5) 2点

B 6点

- 2つの解答にそれぞれ3点。

C 3点

2 第2問：さいころを用いた場合の数

2.1 問題

赤, 青, 黄の3つのさいころがある。それぞれのさいころの6面には, 1から6までの整数が1つずつ書かれている。

- (1) 赤と青のさいころを投げる。出た目の和が偶数になる場合は何通りあるか求めよ。
- (2) 赤と青のさいころを投げる。出た目の積が4の倍数になる場合は何通りあるか求めよ。
- (3) 赤と青と黄のさいころを投げる。出た目の積が8の倍数になる場合は何通りあるか求めよ。

2.2 解答

- (1) 出た目の和が偶数となる場合は, 両方のさいころが奇数の目を出すか, 両方のさいころが偶数の目を出す場合である。両方が奇数の目(1,3,5)を出す場合は, $3 \cdot 3 = 9$ 通り, 両方が偶数の目(2,4,6)を出す場合は, $3 \cdot 3 = 9$ 通りであるから, その和 $9 + 9 = 18$ 通りが解となる。
- (2) 赤のさいころの出た目が奇数(1,3,5)のとき, 青のさいころが4である場合のみで, $3 \cdot 1 = 3$ 通り。赤のさいころの出た目が偶数だが4の倍数ではない(2,6)のとき, 青のさいころが偶数(2,4,6)である場合の $2 \cdot 3 = 6$ 通り。赤のさいころの出た目が4であるとき, 青のさいころの出た目は何でもよく, $1 \cdot 6 = 6$ 通り。これらを全て合わせて, $3 + 6 + 6 = 15$ 通りが解となる。
- (3) 赤のさいころの目によって場合分けし, それぞれで積が8の倍数になる場合を考える。
 - (i) 赤のさいころの目が奇数(1,3,5)のとき, 次の通りに考えられる。
 - (a) 青のさいころの目が奇数のとき, 3つのさいころの目の積は8の倍数にならない。
 - (b) 青のさいころの目が4の倍数ではない偶数(2,6)のとき, 黄のさいころの目は4のみで, 組み合わせは $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ 通り。
 - (c) 青のさいころの目が4のとき, 黄のさいころの目は偶数(2,4,6)で, 組み合わせは $3 \cdot 1 \cdot 3 = 9$ 通り。
 - (ii) 赤のさいころの目が4の倍数ではない偶数(2,6)のとき, 青と黄のさいころの目の積が4の倍数となれば良く, その組み合わせは(2)よりそれぞれ15通りだから, 全体で $2 \cdot 15 = 30$ 通り。
 - (iii) 赤のさいころの目が4のとき, 次の通りに考えられる。
 - (a) 青のさいころの目が奇数(1,3,5)のとき, 黄のさいころの目は偶数(2,4,6)で, 組み合わせは $1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$ 通り。
 - (b) 青のさいころの目が偶数(2,4,6)のとき, 黄のさいころの目は何でもよく, 組み合わせは $1 \cdot 3 \cdot 6 = 18$ 通り。

以上より, 求めるべきは $6 + 9 + 30 + 9 + 18 = 72$ 通りである。

2.3 解説

次を用いて考えます。

和の法則 2つの事柄が同時には起こらないとすると、Aの起こり方が a 通り、Bの起こり方が b 通りとすると、AとBのうち少なくとも一方が起こる場合は $a+b$ 通りである。

積の法則 Aの起こり方 a 通りのそれぞれに対して、Bの起こり方が b 通りあるとき、AとBが共に起こる場合は ab 通りである。

- (1) 両方のさいころが奇数の目を出す場合について、赤のさいころが1,3,5のいずれの目を出したとしても、青のさいころが1,3,5を出す場合が考えられるため、積の法則で $3 \cdot 3$ 通りと計算できます。偶数の目についても同様。そして最後に、両方のさいころが奇数であることと両方のさいころが偶数であることというのは同時に起こらないため、和の法則で足し算で場合の数を求めています。
- (2) こちらも数え方は(1)と同様です。片方がどんな目が出たかによってもう片方の場合を考えています。
- (3) 一部で(2)を用いることができます。場合分けが多く根気よく計算する必要があります。

2.4 採点

【第2問 14点】

どれも、数え上げの過程によっては部分点を与える。

- (1) 4点
- (2) 5点
- (3) 5点

3 第3問：数字の並べ方

3.1 問題

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7の数字があり、これらから相異なる5つの数字を選んで並べ、5桁の整数を作る。先頭に0が並ぶことは無いものとする。

- (1) 並べ方は全部で何通りあるか求めよ。
- (2) 偶数となる並べ方は全部で何通りあるか求めよ。
- (3) 34000より大きい数となる並べ方は全部で何通りあるか求めよ。
- (4) 並べて作ることでできる5桁の数のうち、小さい方から数えて1000番目の数を求めよ。

3.2 解答

- (1) 最高位は1から7の7通り、その次の位は0から7のうちすでに使った1つを除いた7通り、その次は更に1つを除いた6通り、その次は5通り、最後は4通りとなる。よって、題意を満たす並べ方は全部で $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 5880$ 通りである。
- (2) 全体が偶数となる並べ方は、1の位が偶数となる並べ方と言える。
 - (i) 1の位が0のとき、他の4つの位は残り7つを自由に並べれば良く、その並べ方は $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ 通り。
 - (ii) 1の位が2, 4, 6のいずれかであるとき、最高位は0を除く6通り、次は6通り、次は5通り、次は4通りで並べられる。よって全部で $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 2160$ 通り。

以上より、全部で $840 + 2160 = 3000$ 通り。

- (3) 上2桁が34となる並べ方は、残りの6つから3つを並べるから $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ 通りで、こうして作られる数はどれも34000より大きい。上2桁が35, 36, 37についても並べ方は同様である。従って、最高位が3で題意を満たすものは全部で $120 \cdot 4 = 480$ 通り。最高位が4, 5, 6, 7となる並び方は、それぞれ残りの7つから4つを並べるから、 $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ 通り。従って全部で $840 \cdot 4 = 3360$ 通りある。これらを全て合わせて、題意を満たす並べ方は $480 + 3360 = 3840$ 通りである。
- (4) 小さい方から順に数える。上の位が1となる並べ方は、 $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ 通り。上2桁が20となる並べ方は、 $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ 通り。上3桁が210となる並べ方は、 $5 \cdot 4 = 20$ 通り。上3桁が213となる並べ方は、 $5 \cdot 4 = 20$ 通り。これらを合わせると1000通り。従って、上3桁が213となる並べ方のうち最も大きい数である21376が1000番目にある数である。

3.3 解説

区別できる n 個から k 個を選んで一列に並べる場合の数は次のように考えます。最初は n 個から1個選ぶため n 通り、次は最初に選んだ1個を除いた $n-1$ 個から1個選ぶため $n-1$ 通り、同様に次は今まで選んだ2個を除いた $n-2$ 個から1個選ぶため $n-2$ 通り、 \dots 、と考え、場合の数は

${}_n P_k = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$ 通りとなります。

- (1) 全部を制限なしで並べると、0が最初に来ってしまう場合も存在します。問題文にもある通り、0が最高位となるものは除かなければなりません。
- (2) 「末尾が偶数である場合のみ、その整数は偶数である。」偶数の特徴を抑えられるかが肝要です。末尾を先に確定し、残りの位を後で並べると求められます。
- (3) 場合分けをして地道に計算します。
- (4) こちらも地道に計算します。

3.4 採点

【第3問 16点】

全て、数え上げの過程によっては部分点を与える。

- (1) 4点
- (2) 4点
- (3) 4点
- (4) 4点

4 第4問：順列と円順列と組み合わせ

4.1 問題

男子が4人、女子が3人の合計7人がいる。並べる際に各人は区別する。一列に並ぶ際は先頭と最後尾を区別するものとし、円状に並ぶ際は回転させて一致する並び方は区別しないものとする。

- (1) 7人のうち4人を選んで、一列に並ぶとき、並び方は全部で何通りあるか求めよ。
- (2) 7人のうち4人を選んで組を作るとき、選び方は全部で何通りあるか求めよ。
- (3) 7人が一列に並ぶとき、女子が隣り合わない並び方は全部で何通りあるか求めよ。
- (4) 男子4人全員と、女子のうち2人を選び、合計6人が円状に並ぶ方法は全部で何通りあるか求めよ。
- (5) 7人が円状に並ぶとき、女子が隣り合わない並び方は全部で何通りあるか求めよ。
- (6) 7人を、3人、2人、2人の組に分ける方法は全部で何通りあるか求めよ。

4.2 解答

- (1) 7人のうち4人を選んで並べる方法は、 ${}_7P_4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ 通りである。
- (2) 7人から4人を選ぶ方法は、 ${}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ 通りである。
- (3) まず、男子4人を並べる。この場合の数は $4! = 24$ 通り。このとき、男子と男子の間が3つ存在する。女子がこの間か、先頭、最後尾の5つのうち3つを選んでそこに並べば題意を満たす。どの場所を選ぶか、組み合わせは ${}_5C_3 = 10$ 通りで、女子3人の並び方が $3! = 6$ 通り。よって、題意を満たす並び方は $24 \cdot 10 \cdot 6 = 1440$ 通りである。
- (4) まず、女子を3人のうち2人選ぶ方法は ${}_3C_2 = 3$ 通り。その上で、6人が円状に並ぶ方法は $(6-1)! = 120$ 通り。従って、全部で $3 \cdot 120 = 360$ 通りである。
- (5) まず、男子4人を円状に並べる方法は $(4-1)! = 6$ 通り。その4つの間に女子を3人入れる $4 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ 通り。従って、全部で $6 \cdot 48 = 288$ 通りである。
- (6) 組に名前がついている場合を考える。まず7人から3人を選んで組Aを作り、次に残り4人から2人を選んで組Bを作る。残った2人で組Cを作る。全部で ${}_7C_3 \cdot {}_4C_2 = 35 \cdot 6 = 210$ 通り。今回は組B、Cは区別しないから、題意の分け方は $\frac{210}{2!} = 105$ 通りである。

4.3 解説

- (1) 順列の基本です。
- (2) 組み合わせの基本です。一般に、 ${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$ が成り立ちます。これは、 n 人から k 人を選ぶ組み合わせは、 n 人から $n-k$ 人を対象外とする組み合わせと同じことから言えます。 ${}_nC_k$ の k が大きいと計算が大変になりますから、 k が n の半分以上になったところで、 ${}_nC_{n-k}$ を考えると良いです。今回は ${}_7C_4 = {}_7C_3$ で計算しました。

- (3) ○○が隣り合わない並べ方は頻出です。まず隣り合ってもよい対象を並べ、その隙間に隣り合ってはならない対象を並べるという手順で組み合わせを考えます。
- (4) n 人が円状に並ぶ場合の数は $(n-1)!$ 通りあります。これは n 人のうち誰か1人を固定することで回転を排除し、残りの $n-1$ 人を並べると考えると得られます。あるいは、 n 人を並べる $n!$ 通りには、どの並べ方にも回転して同じになる組み合わせが n 通りあるため、それらを除き $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ と考えることもできます。
- (5) 隣り合わない並べ方と円順列の複合問題。
- (6) 一度、組に名前をつけ、最後に名前を外して区別しないようにと考えました。

4.4 採点

【第4問 18点】

- (1) 3点
(2) 3点
(3) 3点
(4) 3点
(5) 3点
(6) 3点

5 第5問：図形と場合の数

5.1 問題

次の図を参照し、以下の問いに答えよ。

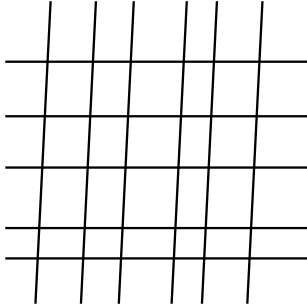


図 5.1

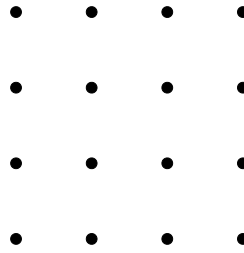


図 5.2

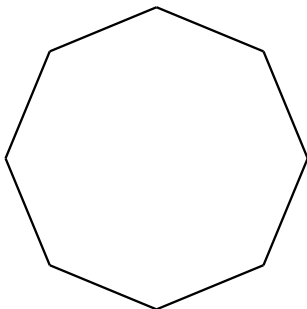


図 5.3

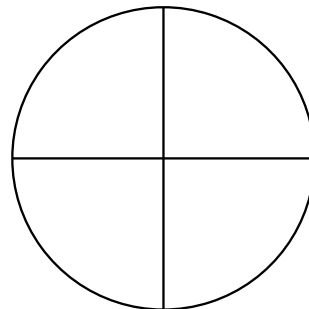


図 5.4

- (1) 図 5.1 のように、6 本の平行な直線と、それらとは平行でない 5 本の平行な直線が交わっている。図の中に、平行四辺形はいくつあるか求めよ。
- (2) 図 5.2 のように、縦と横に等間隔に 4×4 の 16 点がある。この点のうち 4 つを頂点とする正方形を作る方法は全部で何通りあるか求めよ。
- (3) 図 5.3 のように、正八角形がある。この頂点から 3 点を選び、内部に三角形を作る方法は何通りあるか求めよ。ただし、頂点が異なる場合、合同な三角形も区別するものとする。
- (4) 図 5.3 の正八角形に対角線は全部で何本あるか求めよ。
- (5) 図 5.4 のように、円の内部が、円の中心から円周に伸びる線分によって 4 等分されている。4 等分されたものそれぞれを部屋と呼び、線分を共有する部屋を隣り合う部屋と呼ぶ。5 種類の色から好きなだけ選び、隣り合う部屋が同じ色にならないように着色するとき、塗り方は全部で何通りあるか求めよ。ただし、回転させて一致する塗り方は区別しないものとする。

5.2 解答

- (1) 図の縦向きの6本から2本を選び、横向きの5本から2本を選ぶことで、中に平行四辺形を作ることができる。この組み合わせの数は

$${}_6C_2 \cdot {}_5C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 150$$

で、これが全ての平行四辺形の個数である。

- (2) 点同士の間隔を1として考えてよい。まず縦、横に平行な辺の正方形を考える。辺の長さが1の正方形は9個、辺の長さが2の正方形 S_2 は4個、辺の長さが3の正方形 S_3 は1個である。次に、辺が斜めのものを考える。 S_2 の中に1個、つまり全部で4個存在、 S_3 の中に2個存在する。よって、全てで $9 + 4 + 1 + 4 + 2 = 20$ 通り、正方形を作ることができる。
- (3) 8頂点のうちどの3頂点を選んでも、正八角形の中に三角形ができる。合同な三角形も区別するから、

$${}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

より56個の三角形を作ることができる。

- (4) 正八角形の対角線の本数は、8頂点から2頂点を選んで結ぶもののうち、辺である8本を除いて数えれば良く、

$${}_8C_2 - 8 = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} - 8 = 20$$

より20本である。

- (5) 全体を何色で塗るかの場合分けすると、次の通り。

- (i) 1色では、隣り合う部屋が異なる色に着色できない。
- (ii) 2色で部屋を塗る方法を考える。色の選び方は ${}_5C_2 = 10$ 通り。塗り方は、交互に塗る方法の1通りのみ。従って全部で10通り。
- (iii) 3色で部屋を塗る方法を考える。色の選び方は ${}_5C_3 = 10$ 通り。1つの色だけ2箇所を塗るが、どの色でそれを実行するかで3通り。塗り方は回転させれば一致するから1通り。全部で $10 \cdot 3 \cdot 1 = 30$ 通り。
- (iv) 4色で部屋を塗る方法を考える。色の選び方は ${}_5C_4 = 5$ 通り。塗り方は4つの円順列で $(4-1)! = 6$ 通り。全部で $5 \cdot 6 = 30$ 通り。

これらをすべて合わせて、色の塗り方は $10 + 30 + 30 = 70$ 通りである。

5.3 解説

与えられた状況を適切に言い換えることで、組み合わせの計算に持ち込めるかが大事な問題です。似たような問題にある程度触れていることが必要で、分からなかった場合は類題を色々と解いてみると良いです。

5.4 採点

【第5問 18点】

- (1) 3点
- (2) 4点
- (3) 3点
- (4) 4点
- (5) 4点

6 第6問：二項定理

6.1 問題

自然数 n と実数 a, b について,

$$(a+b)^n = a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

が成り立つ。必要に応じてこのことを用い、以下の各問いにそれぞれ答えよ。

- (1) 自然数 n について、次の等式を示せ。

$${}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_{n-1} + {}_n C_n = 2^n$$

- (2) x と y についての式 $(x+2y)^{12}$ を展開し、同類項をまとめたときの、 $x^8 y^4$ の係数を求めよ。

- (3) 自然数 n について、 $8^n - 3^n$ は 5 の倍数であることを示せ。

- (4) 自然数 n について、ある整数の n 乗を 100 で割ったときの余りは、その整数の 100 の位以上の数値に依らないことを示せ。

6.2 解答

$$a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} a b^{n-1} + b^n = (a+b)^n \quad (6.1)$$

- (1) (6.1) に $a = b = 1$ を代入し、

$$1^n + {}_n C_1 \cdot 1^n + {}_n C_2 \cdot 1^n + \cdots + {}_n C_{n-1} \cdot 1^n + 1^n = (1+1)^n$$

を得る。 ${}_n C_0 = {}_n C_n = 1$ であることを用いて式の一部を置き換え整理すると、

$${}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \cdots + {}_n C_{n-1} + {}_n C_n = 2^n$$

となり、題の等式が示された。

- (2) (6.1) に $a = x$, $b = 2y$, $n = 12$ を代入する。 $x^8 y^4$ が現れるのは

$${}_{12} C_4 x^8 (2y)^4$$

の項で、係数を計算すると

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2^4 = 7920$$

である。

- (3) (6.1) に $a = 5$, $b = 3$ を代入すると、

$$5^n + {}_n C_1 \cdot 5^{n-1} \cdot 3 + {}_n C_2 \cdot 5^{n-2} \cdot 3^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} \cdot 5 \cdot 3^{n-1} + 3^n = (5+3)^n$$

3^n を移項して

$$5^n + {}_n C_1 \cdot 5^{n-1} \cdot 3 + {}_n C_2 \cdot 5^{n-2} \cdot 3^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} \cdot 5 \cdot 3^{n-1} = 8^n - 3^n$$

となる。左辺は各項に 5 が掛けられているため、5 の倍数である。従って右辺 $8^n - 3^n$ も 5 の倍数である。

- (4) ある整数の 100 の位以上の数値を a , 1 と 10 の位の数値を b とする。 a は整数, b は $0 \leq b \leq 99$

を満たす整数であり、元の整数は $100a + b$ と表せる。(6.1)の a, b にそれぞれ $100a, b$ を代入し、次を得る。

$$(100a)^n + {}_n C_1 (100a)^{n-1} b + {}_n C_2 (100a)^{n-2} b^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} (100a) b^{n-1} + b^n = (100a + b)^n$$

左辺のうち、100が掛けられていない項は b^n のみであるから、左辺を100で割った余りは b^n を100で割った余りと等しい。従って、ある整数 $100a + b$ の n 乗を100で割った余りは a に依らないことが示された。

6.3 解説

(6.1)を導く方法は次の通り。

$$(a + b)^n = \overbrace{(a + b)(a + b) \cdots (a + b)}^{n \text{ 個}}$$

を展開したとき、

- a^n は、 n 個の $(a + b)$ から全て a を選んだとき (b を0個選んだとき) に得られるため、その個数は ${}_n C_n = {}_n C_0 = 1$ 通り。
- $a^{n-1}b$ は、 n 個の $(a + b)$ から a を $n - 1$ 個選んだとき (b を1個選んだとき) に得られるため、その個数は ${}_n C_{n-1} = {}_n C_1 = n$ 通り、 \cdots ,
- $a^{n-k}b^k$ は、 n 個の $(a + b)$ から a を $n - k$ 個選んだとき (b を k 個選んだとき) に得られるため、その個数は ${}_n C_{n-k} = {}_n C_k$ 通り、 \cdots ,

というように考えることで得られます。

問題によっては、(6.1)が必ず提示されるとは限らず、むしろ提示されない場合が多いため、上記の考え方から導けるようになっておく必要があります。

6.4 採点

【第6問 15点】

- (1) 3点
- (2) 4点
- (3) 4点
- (4) 4点