入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

北海道大学（理系）

対象年度： 2025 年

試験時間： 120 分

問題数： 5 問

第　1　問

α，r を $\alpha > 1$，$r > 1$ を満たす実数とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \alpha$ で公比が r の等比数列とする。数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \log_{a_n}(a_{n+1}) \quad (n = 1,\,2,\,3,\,\cdots\cdots)$$

で定める。

(1)　b_n を n と $\log_\alpha r$ を用いて表せ。

(2)　等式

$$b_n = \frac{n+2}{n+1}$$

がすべての自然数 n について成り立つための必要十分条件を r と α を用いて表せ。

(3)　(2) の条件が成り立つとき，積 a_1a_2，$a_1a_2a_3$，$a_1a_2a_3a_4$ の整数部分がそれぞれ 2 桁，3 桁，4 桁になるような α の範囲を求めよ。

第 2 問

円 $C_1: x^2+y^2=1$ を考える。実数 $p,\ q$ が $p^2+q^2>1$ を満たすとき，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から C_1 に引いた 2 本の接線 $\ell_1,\ \ell_2$ の接点をそれぞれ $\mathrm{Q}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}_2(x_2,\ y_2)$ とする。また，座標平面上の原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする。

(1) 直線 ℓ_1，ℓ_2，線分 OQ_1，OQ_2 で囲まれた四角形の面積 S を $p,\ q$ を用いて表せ。

(2) 点 P が楕円

$$C_2: \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1$$

の上を動くとき，(1) の四角形の面積 S の最大値と最小値を求めよ。

第　3　問

実数 a および自然数 n に対して，定積分

$$I(a,n)=\int_0^{2\pi} e^{ax}\sin(nx)\,dx$$

を考える。ここで e は自然対数の底である。

(1)　$I(a,n)$ を求めよ。

(2)　$a_n=\dfrac{\log n}{2\pi}$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ のとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(a_n,n)$ を求めよ。ただし，$\log n$ は n の自然対数である。また，必要ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ であることを用いてもよい。

第　4　問

a を正の実数とする。

(1)　a が 1 でないとき，複素数 z についての方程式

$$a|z-1|=|(a-2)z+a|$$

を考える。この方程式を満たす全体の集合を複素数平面上に図示せよ。

(2)　方程式

$$|z|^2=6-a, \quad a|z-1|=|(a-2)z+a|$$

をともに満たす複素数 z が存在するような a の範囲を求めよ。

第　5　問

n を 3 以上の整数とする。

(1)　k を整数とする。$k < a < b < c \leqq k + n$ を満たす整数 a, b, c の選び方の総数を n の式で表せ。

(2)　$1 \leqq a < b < c \leqq 2n$ を満たす整数 a, b, c のうち，$a + b > c$ となる a, b, c の選び方の総数を L とする。このとき，$L > {}_n\mathrm{C}_3$ であることを示せ。