入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

北海道大学（理系）

対象年度： 2024 年

試験時間： 120 分

問題数： 5 問

第　1　問

t を実数とし，xy 平面上の点 $\mathrm{P}\,(\cos 2t,\ \cos t)$ および点 $\mathrm{Q}\,(\sin t,\ \sin 2t)$ を考える。

(1)　点 P と点 Q が一致するような t の値をすべて求めよ。

(2)　t が $0 < t < 2\pi$ の範囲で変化するとき，点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ。ただし，x 軸，y 軸との共有点がある場合は，それらの座標を求め，図中に記せ。

第　2　問

各面に 1 つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある。「1」,「2」,「3」が書かれた面がそれぞれ 1 つずつあり，残りの 5 つの面には「0」が書かれている。このさいころを水平な床面に投げて，出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える。最初の持ち点は 0 とし，この試行を繰り返す。例えば，3 回の試行を行ったとき，出た面に書かれた数が「0」,「2」,「3」であれば，持ち点は 5 となる。なお，さいころが水平な床面にあるとき，さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ。また，さいころを投げるとき，各面が出ることは同様に確からしいとする。

(1)　この試行を n 回行ったとき，持ち点が 2 以下である確率を求めよ。ただし，n は 2 以上の自然数とする。

(2)　この試行を 4 回行って持ち点が 10 以上であったときに，さらにこの試行を 2 回行って持ち点が 17 以上である条件付き確率を求めよ。

第　3　問

次の問に答えよ。

(1)　α を実数とする。次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \alpha, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \qquad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots\cdots)$$

(2)　関数 $f_1(x),\, f_2(x),\, f_3(x),\, \cdots\cdots$ を次の関係式で定める。

$$f_1(x) = 3x$$

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x \qquad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots\cdots)$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ。

第　4　問

三角形 OAB が，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = 3$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 5$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 10$ をみたしているとする。三角形 OAB の内接円の中心を I とし，この内接円と辺 OA の接点を H とする。

(1)　辺 OB の長さを求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{HI}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

第　5　問

関数

$$f(x) = x\log(x+2)+1 \qquad (x > -2)$$

を考える。$y = f(x)$ で表される曲線を C とする。C の接線のうち傾きが正で原点を通るものを ℓ とする。ただし，$\log t$ は t の自然対数である。

(1)　直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　曲線 C は下に凸であることを証明せよ。

(3)　C と ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。