

入学試験過去問題
数 学

北海道大学（理系）

対象年度：2024年

試験時間：120分

問題数：5問

1 t を実数とし、 xy 平面上の点 $P(\cos 2t, \cos t)$ および点 $Q(\sin t, \sin 2t)$ を考える。

- (1) 点 P と点 Q が一致するような t の値をすべて求めよ。
- (2) t が $0 < t < 2\pi$ の範囲で変化するとき、点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ。ただし、 x 軸、 y 軸との共有点がある場合は、それらの座標を求め、図中に記せ。

2 各面に1つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある。「1」、「2」、「3」が書かれた面がそれぞれ1つずつあり、残りの5つの面には「0」が書かれている。このさいころを水平な床面に投げて、出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える。最初の持ち点は0とし、この試行を繰り返す。例えば、3回の試行を行ったとき、出た面に書かれた数が「0」、「2」、「3」であれば、持ち点は5となる。なお、さいころが水平な床面にあるとき、さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ。また、さいころを投げるとき、各面が出ることは同様に確からしいとする。

- (1) この試行を n 回行ったとき、持ち点が2以下である確率を求めよ。ただし、 n は2以上の自然数とする。
- (2) この試行を4回行って持ち点が10以上であったときに、さらにこの試行を2回行って持ち点が17以上である条件付き確率を求めよ。

3 次の問に答えよ。

(1) α を実数とする。次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(2) 関数 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ を次の関係式で定める。

$$f_1(x) = 3x$$

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t) dt \right) x \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ。

4 三角形 OAB が、 $|\vec{OA}| = 3$, $|\vec{AB}| = 5$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 10$ をみたしているとする。三角形 OAB の内接円の中心を I とし、この内接円と辺 OA の接点を H とする。

(1) 辺 OB の長さを求めよ。

(2) \vec{OI} を \vec{OA} と \vec{OB} を用いて表せ。

(3) \vec{HI} を \vec{OA} と \vec{OB} を用いて表せ。

5 関数

$$f(x) = x \log(x+2) + 1 \quad (x > -2)$$

を考える。 $y = f(x)$ で表される曲線を C とする。 C の接線のうち傾きが正で原点を通るものを l とする。ただし、 $\log t$ は t の自然対数である。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C は下に凸であることを証明せよ。

(3) C と l および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

