

入学試験過去問題  
数学

北海道大学（理系）

対象年度：2023年

試験時間：120分

問題数：5問

## 第 1 問

複素数平面上における図形  $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$  は次の条件 (A) と (B) をみたすとする。ただし,  $i$  は虚数単位とする。

- (A)  $C_1$  は原点  $O$  を中心とする半径 2 の円である。
- (B) 自然数  $n$  に対して,  $z$  が  $C_n$  上を動くとき  $2w = z + 1 + i$  で定まる  $w$  の描く図形が  $C_{n+1}$  である。
- (1) すべての自然数  $n$  に対して,  $C_n$  は円であることを示し, その中心を表す複素数  $\alpha_n$  と半径  $r_n$  を求めよ。
- (2)  $C_n$  上の点と  $O$  との距離の最小値を  $d_n$  とする。このとき,  $d_n$  を求めよ。また,  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$  を求めよ。

## 第 2 問

$O$  を原点とする座標空間において、3 点  $A(4, 2, 1)$ ,  $B(1, -4, 1)$ ,  $C(2, 2, -1)$  を通る平面を  $\alpha$  とおく。また、球面  $S$  は半径が 9 で、 $S$  と  $\alpha$  の交わりは  $A$  を中心とし  $B$  を通る円であるとする。ただし、 $S$  の中心  $P$  の  $z$  座標は正とする。

- (1) 線分  $AP$  の長さを求めよ。
- (2)  $P$  の座標を求めよ。
- (3)  $S$  と直線  $OC$  は 2 点で交わる。その 2 点間の距離を求めよ。

### 第 3 問

以下の問いに答えよ。ただし、 $e$  は自然対数の底を表す。

- (1)  $k$  を実数の定数とし、 $f(x) = xe^{-x}$  とおく。方程式  $f(x) = k$  の異なる実数解の個数を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  を用いてもよい。
- (2)  $xye^{-(x+y)} = c$  をみたす正の実数  $x, y$  の組がただ 1 つ存在するときの実数  $c$  の値を求めよ。
- (3)  $xye^{-(x+y)} = \frac{3}{e^4}$  をみたす正の実数  $x, y$  を考えるとき、 $y$  のとりうる値の最大値とそのときの  $x$  の値を求めよ。

## 第 4 問

$n$  を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを  $n$  回投げて出た目の数を順に  $a_1, a_2, \dots, a_n$  とし,

$$K_n = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - 6|$$

とおく。また、 $K_n$  のとりうる値の最小値を  $q_n$  とする。

- (1)  $K_3 = 5$  となる確率を求めよ。
- (2)  $q_n$  を求めよ。また  $K_n = q_n$  となるための  $a_1, a_2, \dots, a_n$  に関する必要十分条件を求めよ。
- (3)  $n$  を 4 以上の自然数とする。 $L_n = K_n + |a_4 - 4|$  とおき、 $L_n$  のとりうる値の最小値を  $r_n$  とする。 $L_n = r_n$  となる確率  $p_n$  を求めよ。

## 第 5 問

$a, b$  を  $a^2 + b^2 < 1$  をみたす正の実数とする。また、座標平面上で原点を中心とする半径 1 の円を  $C$  とし、 $C$  の内部にある 2 点  $A(a, 0)$ ,  $B(0, b)$  を考える。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  に対して  $C$  上の点  $P(\cos \theta, \sin \theta)$  を考え、 $P$  における  $C$  の接線に関して  $B$  と対称な点を  $D$  とおく。

- (1)  $f(\theta) = ab \cos 2\theta + a \sin \theta - b \cos \theta$  とおく。方程式  $f(\theta) = 0$  の解が  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲に少なくとも 1 つ存在することを示せ。
- (2)  $D$  の座標を  $b, \theta$  を用いて表せ。
- (3)  $\theta$  が  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき、3 点  $A, P, D$  が同一直線上にあるような  $\theta$  は少なくとも 1 つ存在することを示せ。また、このような  $\theta$  はただ 1 つであることを示せ。