入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

北海道大学（理系）

対象年度： 2023 年

試験時間： 120 分

問題数： 5 問

$\boxed{1}$ 複素数平面上における図形 $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n, \cdots\cdots$ は次の条件 (A) と (B) をみたすとする。ただし，i は虚数単位とする。

(A) C_1 は原点 O を中心とする半径 2 の円である。

(B) 自然数 n に対して，z が C_n 上を動くとき $2w = z + 1 + i$ で定まる w の描く図形が C_{n+1} である。

(1) すべての自然数 n に対して，C_n は円であることを示し，その中心を表す複素数 α_n と半径 r_n を求めよ。

(2) C_n 上の点と O との距離の最小値を d_n とする。このとき，d_n を求めよ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_n$ を求めよ。

$\boxed{2}$ O を原点とする座標空間において，3 点 A$(4,\ 2,\ 1)$，B$(1,\ -4,\ 1)$，C$(2,\ 2,\ -1)$ を通る平面を α とおく。また，球面 S は半径が 9 で，S と α の交わりは A を中心とし B を通る円であるとする。ただし，S の中心 P の z 座標は正とする。

(1) 線分 AP の長さを求めよ。

(2) P の座標を求めよ。

(3) S と直線 OC は 2 点で交わる。その 2 点間の距離を求めよ。

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底を表す。

(1) k を実数の定数とし，$f(x) = xe^{-x}$ とおく。方程式 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ を用いてもよい。

(2) $xye^{-(x+y)} = c$ をみたす正の実数 x，y の組がただ 1 つ存在するときの実数 c の値を求めよ。

(3) $xye^{-(x+y)} = \dfrac{3}{e^4}$ をみたす正の実数 x，y を考えるとき，y のとりうる値の最大値とそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{4}$　n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて出た目の数を順に $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ とし，

$$K_n = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \cdots\cdots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - 6|$$

とおく。また，K_n のとりうる値の最小値を q_n とする。

(1)　$K_3 = 5$ となる確率を求めよ。

(2)　q_n を求めよ。また $K_n = q_n$ となるための $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ に関する必要十分条件を求めよ。

(3)　n を 4 以上の自然数とする。$L_n = K_n + |a_4 - 4|$ とおき，L_n のとりうる値の最小値を r_n とする。$L_n = r_n$ となる確率 p_n を求めよ。

$\boxed{5}$　a, b を $a^2 + b^2 < 1$ をみたす正の実数とする。また，座標平面上で原点を中心とする半径 1 の円を C とし，C の内部にある 2 点 $\mathrm{A}\,(a,\ 0)$，$\mathrm{B}\,(0,\ b)$ を考える。$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に対して C 上の点 $\mathrm{P}\,(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を考え，P における C の接線に関して B と対称な点を D とおく。

(1)　$f(\theta) = ab\cos 2\theta + a\sin\theta - b\cos\theta$ とおく。方程式 $f(\theta) = 0$ の解が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つ存在することを示せ。

(2)　D の座標を b, θ を用いて表せ。

(3)　θ が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，3 点 A, P, D が同一直線上にあるような θ は少なくとも 1 つ存在することを示せ。また，このような θ はただ 1 つであることを示せ。