

入学試験過去問題
数 学

北海道大学（理系）

対象年度：2022年

試験時間：120分

問題数：5問

第 1 問

$0 \leq a \leq b \leq 1$ をみたす a, b に対し, 関数

$$f(x) = |x(x-1)| + |(x-a)(x-b)|$$

を考える。 x が実数の範囲を動くとき, $f(x)$ は最小値 m をもつとする。

- (1) $x < 0$ および $x > 1$ では $f(x) > m$ となることを示せ。
- (2) $m = f(0)$ または $m = f(1)$ であることを示せ。
- (3) a, b が $0 \leq a \leq b \leq 1$ をみたして動くとき, m の最大値を求めよ。

第 2 問

a は $a \neq 1$ をみたす正の実数とする。 xy 平面上の点 $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ および $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$ が, すべての自然数 n について

$$\overrightarrow{P_n P_{n+1}} = (1-a) \overrightarrow{P_n Q_n}, \quad \overrightarrow{Q_n Q_{n+1}} = \left(0, \frac{a^{-n}}{1-a}\right)$$

をみたしているとする。また, P_n の座標を (x_n, y_n) とする。

- (1) x_{n+2} を a, x_n, x_{n+1} で表せ。
- (2) $x_1 = 0, x_2 = 1$ のとき, 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $y_1 = \frac{a}{(1-a)^2}, y_2 - y_1 = 1$ のとき, 数列 $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。

第 3 問

以下の問いに答えよ。

- (1) 連立不等式 $x \geq 2$, $2^x \leq x^y \leq x^2$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ。ただし、自然対数の底 e が $2 < e < 3$ をみたすことを用いてよい。
- (2) $a > 0$ に対して、連立不等式 $2 \leq x \leq 6$, $(x^y - 2^x)(x^a - x^y) \geq 0$ の表す xy 平面
上の領域の面積を $S(a)$ とする。 $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

第 4 問

アルファベットの A と書かれた玉が 1 個, D と書かれた玉が 1 個, H と書かれた玉が 1 個, I と書かれた玉が 1 個, K と書かれた玉が 2 個, O と書かれた玉が 2 個ある。これら 8 個の玉を円形に並べる。

- (1) 時計回りに HOKKAIDO と並ぶ確率を求めよ。
- (2) 隣り合う子音が存在する確率を求めよ。ここで子音とは, D, H, K の 3 文字 (玉は 4 個) のことである。
- (3) 隣り合う子音が存在するとき, それが KK だけである条件つき確率を求めよ。

第 5 問

複素数 z に関する次の 2 つの方程式を考える。ただし、 \bar{z} を z と共役な複素数とし、 i を虚数単位とする。

$$z\bar{z} = 4 \quad \dots\dots\textcircled{1} \qquad |z| = |z - \sqrt{3} + i| \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

- (1) ①, ② それぞれの方程式について, その解 z 全体が表す図形を複素数平面上に図示せよ。
- (2) ①, ② の共通解となる複素数をすべて求めよ。
- (3) (2) で求めたすべての複素数の積を w とおく。このとき, w^n が負の実数となるための整数 n の必要十分条件を求めよ。