入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

北海道大学（理系）

対象年度： 2022 年

試験時間： 120 分

問題数： 5 問

$\boxed{1}$ $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ をみたす a, b に対し，関数

$$f(x) = |\,x(x-1)\,| + |\,(x-a)(x-b)\,|$$

を考える。x が実数の範囲を動くとき，$f(x)$ は最小値 m をもつとする。

(1) $x < 0$ および $x > 1$ では $f(x) > m$ となることを示せ。

(2) $m = f(0)$ または $m = f(1)$ であることを示せ。

(3) a, b が $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$ をみたして動くとき，m の最大値を求めよ。

$\boxed{2}$ a は $a \neq 1$ をみたす正の実数とする。xy 平面上の点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots\cdots, \mathrm{P}_n, \cdots\cdots$ および $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \cdots\cdots, \mathrm{Q}_n, \cdots\cdots$ が，すべての自然数 n について

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = (1-a)\,\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}\,, \qquad \overrightarrow{\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}} = \left(0,\ \frac{a^{-n}}{1-a}\right)$$

をみたしているとする。また，P_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする。

(1) x_{n+2} を a, x_n, x_{n+1} で表せ。

(2) $x_1 = 0$，$x_2 = 1$ のとき，数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $y_1 = \dfrac{a}{(1-a)^2}$，$y_2 - y_1 = 1$ のとき，数列 $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 連立不等式 $x \geqq 2$，$2^x \leqq x^y \leqq x^2$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ。ただし，自然対数の底 e が $2 < e < 3$ をみたすことを用いてよい。

(2) $a > 0$ に対して，連立不等式 $2 \leqq x \leqq 6$，$(x^y - 2^x)(x^a - x^y) \geqq 0$ の表す xy 平面上の領域の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

$\boxed{4}$　アルファベットの A と書かれた玉が 1 個，D と書かれた玉が 1 個，H と書かれた玉が 1 個，I と書かれた玉が 1 個，K と書かれた玉が 2 個，O と書かれた玉が 2 個ある。これら 8 個の玉を円形に並べる。

(1)　時計回りに HOKKAIDO と並ぶ確率を求めよ。

(2)　隣り合う子音が存在する確率を求めよ。ここで子音とは，D，H，K の 3 文字（玉は 4 個）のことである。

(3)　隣り合う子音が存在するとき，それが KK だけである条件つき確率を求めよ。

$\boxed{5}$　複素数 z に関する次の 2 つの方程式を考える。ただし，$\overline{z}$ を z と共役な複素数とし，i を虚数単位とする。

$$z\overline{z} = 4 \quad \cdots\cdots ① \qquad\qquad |z| = \left|z - \sqrt{3} + i\right| \quad \cdots\cdots ②$$

(1)　①，② それぞれの方程式について，その解 z 全体が表す図形を複素数平面上に図示せよ。

(2)　①，② の共通解となる複素数をすべて求めよ。

(3)　(2) で求めたすべての複素数の積を w とおく。このとき，w^n が負の実数となるための整数 n の必要十分条件を求めよ。