

入学試験過去問題
数 学

北海道大学（理系）

対象年度：2021年

試験時間：120分

問題数：5問

第 1 問

三角形 OAB において、辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D とし、直線 OA に関して点 D と対称な点を E とする。 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とし、 $|\vec{a}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ を満たすとする。

- (1) 点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする。 \vec{OF} を \vec{a} を用いて表せ。
- (2) \vec{OE} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。
- (3) 三角形 BDE の面積が $\frac{5}{9}$ になるとき、 $|\vec{b}|$ の値を求めよ。

第 2 問

a を $a \neq -3$ を満たす定数とする。放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上の点 $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ における接線を l_1 、点 $B\left(a+2, \frac{(a+2)^2}{2}\right)$ における接線を l_2 とする。 l_1 と l_2 の交点を C とおく。

- (1) C の座標を a を用いて表せ。
- (2) a が $a > 0$ を満たしながら動くとき、 $\frac{|AB|}{|BC|}$ が最小となるときの a の値を求めよ。
ただし、 $|AB|$ および $|BC|$ はそれぞれ線分 AB と線分 BC の長さを表す。

第 3 問

正の実数 x, y が, 方程式

$$\frac{9^{4x} + 9^{y^2+1}}{6} = 3^{4x+y^2} \quad \dots\dots(\star)$$

を満たすとする。

(1) y^2 を x を用いて表せ。

(2) 正の実数 x, y が (\star) および $1 - \frac{x}{y} > 0$ を満たしながら動くとき,

$$\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}} 4} + \frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}} 4}$$

の最大値を求めよ。

第 4 問

$a_1 = 2, b_1 = 1$ および

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められた数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がある。 $c_n = a_n b_n$ とおく。

- (1) c_2 を求めよ。
- (2) c_n は偶数であることを示せ。
- (3) n が偶数のとき、 c_n は 28 で割り切れることを示せ。

第 5 問

座標平面上で、媒介変数 θ を用いて

$$x = (1 + \cos \theta) \cos \theta, \quad y = \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

と表される曲線 C がある。 C 上の点で x 座標の値が最小になる点を A とし、 A の x 座標の値を a とおく。 B を点 $(a, 0)$ 、 O を原点 $(0, 0)$ とする。

- (1) a を求めよ。
- (2) 線分 AB と線分 OB と C で囲まれた部分の面積を求めよ。