入 学 試 験 過 去 問 題

数　学

北海道大学（理系）

対象年度： 2021 年

試験時間： 120 分

問題数： 5 問

$\boxed{1}$ 三角形OABにおいて，辺ABを$2:1$に内分する点をDとし，直線OAに関して点Dと対称な点をEとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とし，$\left|\vec{a}\right|=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=6$を満たすとする。

(1) 点Bから直線OAに下ろした垂線と直線OAとの交点をFとする。$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$を$\vec{a}$を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

(3) 三角形BDEの面積が$\dfrac{5}{9}$になるとき，$\left|\vec{b}\right|$の値を求めよ。

$\boxed{2}$ aを$a\fallingdotseq -3$を満たす定数とする。放物線$y=\dfrac{1}{2}x^2$上の点A$\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$における接線を$\ell_1$，点B$\left(a+2,\ \dfrac{(a+2)^2}{2}\right)$における接線を$\ell_2$とする。$\ell_1$と$\ell_2$の交点をCとおく。

(1) Cの座標をaを用いて表せ。

(2) aが$a>0$を満たしながら動くとき，$\dfrac{|\mathrm{AB}|}{|\mathrm{BC}|}$が最小となるときの$a$の値を求めよ。ただし，$|\mathrm{AB}|$および$|\mathrm{BC}|$はそれぞれ線分ABと線分BCの長さを表す。

$\boxed{3}$ 正の実数$x,\ y$が，方程式

$$\frac{9^{4x}+9^{y^2+1}}{6}=3^{4x+y^2} \qquad \cdots\cdots(\star)$$

を満たすとする。

(1) y^2をxを用いて表せ。

(2) 正の実数$x,\ y$が$(\star)$および$1-\dfrac{x}{y}>0$を満たしながら動くとき，

$$\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}}4}+\frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}}4}$$

の最大値を求めよ。

$\boxed{4}$ $a_1 = 2,\, b_1 = 1$ および

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n \quad (n = 1,\, 2,\, 3,\, \cdots)$$

で定められた数列 $\{a_n\},\, \{b_n\}$ がある。$c_n = a_n b_n$ とおく。

(1) c_2 を求めよ。

(2) c_n は偶数であることを示せ。

(3) n が偶数のとき，c_n は 28 で割り切れることを示せ。

$\boxed{5}$ 座標平面上で，媒介変数 θ を用いて

$$x = (1 + \cos\theta)\cos\theta, \quad y = \sin\theta \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

と表される曲線 C がある。C 上の点で x 座標の値が最小になる点を A とし，A の x 座標の値を a とおく。B を点 $(a,\ 0)$，O を原点 $(0,\ 0)$ とする。

(1) a を求めよ。

(2) 線分 AB と線分 OB と C で囲まれた部分の面積を求めよ。