

入学試験過去問題

数 学

一橋大学

対象年度：2021 年

試験時間：120 分

問題数：5 問

第 1 問

1000 以下の素数は 250 個以下であることを示せ。

第 2 問

実数 x に対し, x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。数列 $\{a_k\}$ を

$$a_k = 2^{[\sqrt{k}]} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義する。正の整数 n に対して

$$b_n = \sum_{k=1}^{n^2} a_k$$

を求めよ。

第 3 問

次の問いに答えよ。

- (1) a, b を実数とし、2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ が実数解 α, β をもつとする。ただし、重解の場合は $\alpha = \beta$ とする。3 辺の長さが 1, α, β である三角形が存在する (a, b) の範囲を求め図示せよ。
- (2) 3 辺の長さが 1, α, β である三角形が存在するとき、

$$\frac{\alpha\beta + 1}{(\alpha + \beta)^2}$$

の値の範囲を求めよ。

第 4 問

$k > 0$ とする。円 C を $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ とし、放物線 S を $y = \frac{1}{k}x^2$ とする。

- (1) C と S が共有点をちょうど 3 個持つときの k の範囲を求めよ。
- (2) k が (1) の範囲を動くとき、 C と S の共有点のうちで x 座標が正の点を P とする。 P における S の接線と S と y 軸とによって囲まれる領域の面積の最大値を求めよ。

第 5 問

サイコロを 3 回投げて出た目を順に a, b, c とするとき,

$$\int_{a-3}^{a+3} (x-b)(x-c) dx = 0$$

となる確率を求めよ。