

数問

数 学

2021 年 度（前期）

注 意

1. 「解答はじめ」というまで、この問題冊子を開いてはいけない。
2. 問題は1冊、解答用紙は3枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので、引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入する。

（例） 受験番号 80001 番の場合 →

8	0	0	0	1
---	---	---	---	---

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても、代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後、問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1 1000 以下の素数は 250 個以下であることを示せ。

2 実数 x に対し, x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。数列 $\{a_k\}$ を

$$a_k = 2^{[\sqrt{k}]} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義する。正の整数 n に対して

$$b_n = \sum_{k=1}^{n^2} a_k$$

を求めよ。

3 次の問いに答えよ。

(1) a, b を実数とし, 2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ が実数解 α, β をもつとする。ただし, 重解の場合は $\alpha = \beta$ とする。3 辺の長さが 1, α, β である三角形が存在する (a, b) の範囲を求め図示せよ。

(2) 3 辺の長さが 1, α, β である三角形が存在するとき,

$$\frac{\alpha\beta + 1}{(\alpha + \beta)^2}$$

の値の範囲を求めよ。

4 $k > 0$ とする。円 C を $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ とし、放物線 S を $y = \frac{1}{k}x^2$ とする。

- (1) C と S が共有点をちょうど 3 個持つときの k の範囲を求めよ。
- (2) k が (1) の範囲を動くとき、 C と S の共有点のうちで x 座標が正の点を P とする。 P における S の接線と S と y 軸とによって囲まれる領域の面積の最大値を求めよ。

5 サイコロを 3 回投げて出た目を順に a, b, c とするとき、

$$\int_{a-3}^{a+3} (x-b)(x-c) dx = 0$$

となる確率を求めよ。

