

数問

数 学

2019 年 度（前期）

注 意

1. 「解答はじめ」というまで、この問題冊子を開いてはいけない。
2. 問題は1冊、解答用紙は3枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので、引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入する。

（例） 受験番号 80001 番の場合 →

8	0	0	0	1
---	---	---	---	---

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても、代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後、問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1 p を自然数とする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = p^2, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 13 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。数列 $\{a_n\}$ に平方数でない項が存在することを示せ。

2 原点を O とする座標平面上の点 Q は円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ の部分を動く。点 Q と点 $A(2, 2)$ に対して

$$\overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ}) \overrightarrow{OQ}$$

を満たす点 P の軌跡を求め、図示せよ。

3 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ とする。また、 α は 1 より大きい実数とする。曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $P(\alpha, f(\alpha))$ における接線と x 軸の交点を Q とする。点 Q を通る C の接線の中で傾きが最小のものを ℓ とする。

(1) ℓ と C の接点の x 座標を α の式で表せ。

(2) $\alpha = 2$ とする。 ℓ と C で囲まれた部分の面積を求めよ。

4 原点を O とする座標平面上に、点 $(2, 0)$ を中心とする半径 2 の円 C_1 と、点 $(1, 0)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある。点 P を中心とする円 C_3 は C_1 に内接し、かつ C_2 に外接する。ただし、 P は x 軸上にないものとする。 P を通り x 軸に垂直な直線と x 軸の交点を Q とするとき、三角形 OPQ の面積の最大値を求めよ。

5 左下の図のような縦 3 列横 3 列の 9 個のマスがある。異なる 3 個のマスを選び、それぞれに 1 枚ずつコインを置く。マスの選び方は、どれも同様に確からしいものとする。縦と横の各列について、点数を次のように定める。

- その列に置かれているコインが 1 枚以下のとき、 0 点
- その列に置かれているコインがちょうど 2 枚のとき、 1 点
- その列に置かれているコインが 3 枚のとき、 3 点

縦と横のすべての列の点数の合計を S とする。たとえば、右下の図のようにコインが置かれている場合、縦の 1 列目と横の 2 列目の点数が 1 点、他の列の点数が 0 点であるから、 $S = 2$ となる。

(1) $S = 3$ となる確率を求めよ。

(2) $S = 1$ となる確率を求めよ。

(3) $S = 2$ となる確率を求めよ。



