

数問

数 学

2016 年 度（前期）

注 意

1. 「解答はじめ」というまで、この問題冊子を開いてはいけない。
2. 問題は1冊、解答用紙は3枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので、引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入する。

（例） 受験番号 80001 番の場合 →

8	0	0	0	1
---	---	---	---	---

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても、代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後、問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1 $6 \cdot 3^{3x} + 1 = 7 \cdot 5^{2x}$ を満たす 0 以上の整数 x をすべて求めよ。

2 θ を実数とし、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \cos \theta, \quad a_{n+2} = \frac{3}{2}a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。すべての n について $a_n = \cos(n-1)\theta$ が成り立つとき、 $\cos \theta$ を求めよ。

3 硬貨が 2 枚ある。最初は 2 枚とも表の状態で置かれている。次の操作を n 回行ったあと、硬貨が 2 枚とも裏になっている確率を求めよ。

[操作] 2 枚とも表、または 2 枚とも裏のときには、2 枚の硬貨両方を投げる。表と裏が 1 枚ずつのときには、表になっている硬貨だけを投げる。

4 a を実数とし、 $f(x) = x^3 - 3ax$ とする。区間 $-1 \leq x \leq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。 M の最小値とそのときの a の値を求めよ。

5 次の [I], [II] のいずれか一方を選択して解答せよ。なお, 解答用紙の所定の欄にどちらを選択したかを記入すること。

[I] 平面上の2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は零ベクトルではなく, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度は 60° である。このとき

$$r = \frac{|\vec{a} + 2\vec{b}|}{|2\vec{a} + \vec{b}|}$$

のとりうる値の範囲を求めよ。

[II] x は0以上の整数である。次の表は2つの科目 X と Y の試験を受けた5人の得点をまとめたものである。

	①	②	③	④	⑤
科目 X の得点	x	6	4	7	4
科目 Y の得点	9	7	5	10	9

(1) $2n$ 個の実数 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ について,

$$a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k, \quad b = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k$$

とすると,

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a)(b_k - b) = \sum_{k=1}^n a_k b_k - nab$$

が成り立つことを示せ。

(2) 科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数 r_{XY} を x で表せ。

(3) x の値を2増やして r_{XY} を計算しても値は同じであった。このとき, r_{XY} の値を四捨五入して小数第1位まで求めよ。

