

数問

数 学

2013 年 度（前期）

注 意

1. 「解答はじめ」というまで、この問題冊子を開いてはいけない。
2. 問題は1冊、解答用紙は3枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので、引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入する。

（例） 受験番号 80001 番の場合 →

8	0	0	0	1
---	---	---	---	---

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても、代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後、問題冊子と白紙は持ち帰ること。

- 1 $3p^3 - p^2q - pq^2 + 3q^3 = 2013$ を満たす正の整数 p, q の組をすべて求めよ。

- 2 平面上の4点 O, A, B, C が

$$OA = 4, \quad OB = 3, \quad OC = 2, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 3$$

を満たすとき、 $\triangle ABC$ の面積の最大値を求めよ。

- 3 原点を O とする xy 平面上に、放物線 $C: y = 1 - x^2$ がある。 C 上に2点 $P(p, 1 - p^2), Q(q, 1 - q^2)$ を $p < q$ となるようにとる。

- (1) 2つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を、 p と q の式で表せ。
- (2) $q = p + 1$ であるとき S の最小値を求めよ。
- (3) $pq = -1$ であるとき S の最小値を求めよ。

- 4 t を正の定数とする。原点を O とする空間内に、2 点 $A(2t, 2t, 0)$, $B(0, 0, t)$ がある。また動点 P は

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 3$$

を満たすように動く。 OP の最大値が 3 となるような t の値を求めよ。

- 5 サイコロを n 回投げ、 k 回目に出た目を a_k とする。また、 s_n を

$$s_n = \sum_{k=1}^n 10^{n-k} a_k$$

で定める。

- (1) s_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。
- (2) s_n が 6 で割り切れる確率を求めよ。
- (3) s_n が 7 で割り切れる確率を求めよ。

