

数問

数 学

2012 年 度（前期）

注 意

1. 「解答はじめ」というまで、この問題冊子を開いてはいけない。
2. 問題は1冊、解答用紙は3枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので、引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入する。

（例） 受験番号 80001 番の場合 →

8	0	0	0	1
---	---	---	---	---

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても、代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後、問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1 1つの角が 120° の三角形がある。この三角形の3辺の長さ x, y, z は $x < y < z$ を満たす整数である。

- (1) $x + y - z = 2$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。
- (2) $x + y - z = 3$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。
- (3) a, b を0以上の整数とする。 $x + y - z = 2^a 3^b$ を満たす x, y, z の組の個数を a と b の式で表せ。

2 a を0以上の定数とする。関数 $y = x^3 - 3a^2x$ のグラフと方程式 $|x| + |y| = 2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ。

3 定数 a, b, c, d に対して、平面上の点 (p, q) を点 $(ap + bq, cp + dq)$ に移す操作を考える。ただし、 $(a, b, c, d) \neq (1, 0, 0, 1)$ である。 k を0でない定数とする。放物線 $C: y = x^2 - x + k$ 上のすべての点は、この操作によって C 上に移る。

- (1) a, b, c, d を求めよ。
- (2) C 上の点 A における C の接線と、点 A をこの操作によって移した点 A' における C の接線は、原点で直交する。このときの k の値および点 A の座標をすべて求めよ。

4 xyz 空間内の平面 $z = 2$ 上に点 P があり，平面 $z = 1$ 上に点 Q がある。
直線 PQ と xy 平面の交点を R とする。

- (1) $P(0, 0, 2)$ とする。点 Q が平面 $z = 1$ 上で点 $(0, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 R の軌跡の方程式を求めよ。
- (2) 平面 $z = 1$ 上に 4 点 $A(1, 1, 1)$, $B(1, -1, 1)$, $C(-1, -1, 1)$, $D(-1, 1, 1)$ をとる。点 P が平面 $z = 2$ 上で点 $(0, 0, 2)$ を中心とする半径 1 の円周上を動き，点 Q が正方形 $ABCD$ の周上を動くとき，点 R が動きうる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。

5 最初に 1 の目が上面にあるようにサイコロが置かれている。その後， 4 つの側面から 1 つの面を無作為に選び，その面が上面になるように置き直す操作を n 回繰り返す。なお，サイコロの向かい合う面の目の数の和は 7 である。

- (1) 最後に 1 の目が上面にある確率を求めよ。
- (2) 最後に上面にある目の数の期待値を求めよ。

