

入学試験過去問題

数 学

一橋大学

対象年度：2010年

試験時間：120分

問題数：5問

第 1 問

実数 p, q, r に対して, 3 次多項式 $f(x)$ を $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ と定める。実数 a, c , および 0 でない実数 b に対して, $a + bi$ と c はいずれも方程式 $f(x) = 0$ の解であるとする。ただし, i は虚数単位を表す。

- (1) $y = f(x)$ のグラフにおいて, 点 $(a, f(a))$ における接線の傾きを $s(a)$ とし, 点 $(c, f(c))$ における接線の傾きを $s(c)$ とする。 $a \neq c$ のとき, $s(a)$ と $s(c)$ の大小を比較せよ。
- (2) さらに, a, c は整数であり, b は 0 でない整数であるとする。次を証明せよ。
 - (i) p, q, r はすべて整数である。
 - (ii) p が 2 の倍数であり, q が 4 の倍数であるならば, a, b, c はすべて 2 の倍数である。

第 2 問

a を実数とする。傾きが m である 2 つの直線が、曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ とそれぞれ点 A, 点 B で接している。

- (1) 線分 AB の中点を C とすると、C は曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ 上にあることを示せ。
- (2) 直線 AB の方程式が $y = -x - 1$ であるとき、 a, m の値を求めよ。

第 3 問

原点を O とする xyz 空間内で, x 軸上の点 A , xy 平面上の点 B , z 軸上の点 C を, 次をみたすように定める。

$$\angle OAC = \angle OBC = \theta, \quad \angle AOB = 2\theta, \quad OC = 3$$

ただし, A の x 座標, B の y 座標, C の z 座標はいずれも正であるとする。さらに, $\triangle ABC$ 内の点のうち, O からの距離が最小の点を H とする。また, $t = \tan \theta$ とおく。

- (1) 線分 OH の長さを t の式で表せ。
- (2) H の z 座標を t の式で表せ。

第 4 問

0 以上の整数 a_1, a_2 があたえられたとき, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$$

により定める。

- (1) $a_1 = 1, a_2 = 2$ のとき, a_{2010} を 10 で割った余りを求めよ。
- (2) $a_2 = 3a_1$ のとき, $a_{n+4} - a_n$ は 10 の倍数であることを示せ。

第 5 問

n を 3 以上の自然数とする。サイコロを n 回投げ、出た目の数をそれぞれ順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする。 $i = 2, 3, \dots, n$ に対して $X_i = X_{i-1}$ となる事象を A_i とする。

- (1) $A_2, A_3, \dots, A_n$ のうち少なくとも 1 つが起こる確率 p_n を求めよ。
- (2) $A_2, A_3, \dots, A_n$ のうち少なくとも 2 つが起こる確率 q_n を求めよ。