

数問

数 学

2010 年 度（前期）

注 意

1. 「解答はじめ」というまで，この問題冊子を開いてはいけない。
2. 問題は1冊，解答用紙は3枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので，引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入する。

（例） 受験番号 80001 番の場合 →

8	0	0	0	1
---	---	---	---	---

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても，代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後，問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1 実数 p, q, r に対して、3 次多項式 $f(x)$ を $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ と定める。実数 a, c 、および 0 でない実数 b に対して、 $a + bi$ と c はいずれも方程式 $f(x) = 0$ の解であるとする。ただし、 i は虚数単位を表す。

(1) $y = f(x)$ のグラフにおいて、点 $(a, f(a))$ における接線の傾きを $s(a)$ とし、点 $(c, f(c))$ における接線の傾きを $s(c)$ とする。 $a \neq c$ のとき、 $s(a)$ と $s(c)$ の大小を比較せよ。

(2) さらに、 a, c は整数であり、 b は 0 でない整数であるとする。次を証明せよ。

(i) p, q, r はすべて整数である。

(ii) p が 2 の倍数であり、 q が 4 の倍数であるならば、 a, b, c はすべて 2 の倍数である。

2 a を実数とする。傾きが m である 2 つの直線が、曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ とそれぞれ点 A、点 B で接している。

(1) 線分 AB の中点を C とすると、C は曲線 $y = x^3 - 3ax^2$ 上にあることを示せ。

(2) 直線 AB の方程式が $y = -x - 1$ であるとき、 a, m の値を求めよ。

3 原点を O とする xyz 空間内で、 x 軸上の点 A、 xy 平面上の点 B、 z 軸上の点 C を、次をみたすように定める。

$$\angle OAC = \angle OBC = \theta, \quad \angle AOB = 2\theta, \quad OC = 3$$

ただし、A の x 座標、B の y 座標、C の z 座標はいずれも正であるとする。さらに、 $\triangle ABC$ 内の点のうち、O からの距離が最小の点を H とする。また、 $t = \tan \theta$ とおく。

(1) 線分 OH の長さを t の式で表せ。

(2) H の z 座標を t の式で表せ。

4 0 以上の整数 a_1, a_2 があたえられたとき, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 6a_n$$

により定める。

- (1) $a_1 = 1, a_2 = 2$ のとき, a_{2010} を 10 で割った余りを求めよ。
- (2) $a_2 = 3a_1$ のとき, $a_{n+4} - a_n$ は 10 の倍数であることを示せ。

5 n を 3 以上の自然数とする。サイコロを n 回投げ, 出た目の数をそれぞれ順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする。 $i = 2, 3, \dots, n$ に対して $X_i = X_{i-1}$ となる事象を A_i とする。

- (1) $A_2, A_3, \dots, A_n$ のうち少なくとも 1 つが起こる確率 p_n を求めよ。
- (2) $A_2, A_3, \dots, A_n$ のうち少なくとも 2 つが起こる確率 q_n を求めよ。

