

数問

数 学

2009 年 度（前期）

注 意

1. 「解答はじめ」というまで、この問題冊子を開いてはいけない。
2. 問題は1冊、解答用紙は3枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので、引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入する。

（例） 受験番号 80001 番の場合 →

8	0	0	0	1
---	---	---	---	---

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所を書くとは無効になることがある。
5. 書き損じても、代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後、問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1 2以上の整数 m, n は $m^3 + 1^3 = n^3 + 10^3$ をみたす。 m, n を求めよ。

2

(1) 任意の角 θ に対して、 $-2 \leq x \cos \theta + y \sin \theta \leq y + 1$ が成立するような点 (x, y) の全体からなる領域を xy 平面上に図示し、その面積を求めよ。

(2) 任意の角 α, β に対して、 $-1 \leq x^2 \cos \alpha + y \sin \beta \leq 1$ が成立するような点 (x, y) の全体からなる領域を xy 平面上に図示し、その面積を求めよ。

3 p, q を実数とする。放物線 $y = x^2 - 2px + q$ が、中心 $(p, 2q)$ で半径 1 の円と中心 (p, p) で半径 1 の円の両方と共有点をもつ。この放物線の頂点が存在しうる領域を xy 平面上に図示せよ。

4 一辺の長さが 2 の正三角形 ABC を平面上におく。 $\triangle ABC$ を 1 つの辺に関して 180° 折り返すという操作を繰り返し行う。辺 BC に関する折り返しを T_A 、辺 CA に関する折り返しを T_B 、辺 AB に関する折り返しを T_C とする。 $\triangle ABC$ は、最初 3 点 A, B, C がそれぞれ平面上の 3 点 O, B', C' の上に置かれているとする。

(1) T_A, T_C, T_B, T_C, T_A の順に折り返し操作を施したときの頂点 A の移り先を P とする。また、 $T_A, T_C, T_B, T_A, T_C, T_B, T_A$ の順に折り返し操作を施したときの頂点 A の移り先を Q とする。 $\theta = \angle POQ$ とするとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

(2) 整数 k, ℓ に対して、 $\overrightarrow{OR} = 3k\overrightarrow{OB'} + 3\ell\overrightarrow{OC'}$ により定められる点 R は、 T_A, T_B, T_C の折り返し操作を組み合わせることにより、点 A の移り先になることを示せ。

5 X , Y , Z と書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつある。この中から 1 枚のカードが選ばれたとき, xy 平面上の点 P を次の規則にしたがって移動する。

- X のカードが選ばれたとき, P を x 軸の正の方向に 1 だけ移動する。
- Y のカードが選ばれたとき, P を y 軸の正の方向に 1 だけ移動する。
- Z のカードが選ばれたとき, P は移動せずそのままの位置にとどまる。

(1) n を正の整数とする。最初, 点 P を原点の位置におく。 X のカードと Y のカードの 2 枚から無作為に 1 枚を選び, P を, 上の規則にしたがって移動するという試行を n 回繰り返す。

(i) n 回の試行の後に P が到達可能な点の個数を求めよ。

(ii) P が到達する確率が最大の点をすべて求めよ。

(2) n を正の 3 の倍数とする。最初, 点 P を原点の位置におく。 X のカード, Y のカード, Z のカードの 3 枚から無作為に 1 枚を選び, P を, 上の規則にしたがって移動するという試行を n 回繰り返す。

(i) n 回の試行の後に P が到達可能な点の個数を求めよ。

(ii) P が到達する確率が最大の点をすべて求めよ。

