

入学試験過去問題 数 学

一橋大学

対象年度：2007 年

試験時間：120 分

問題数：5 問

第 1 問

m を整数とし、 $f(x) = x^3 + 8x^2 + mx + 60$ とする。

- (1) 整数 a と、0 ではない整数 b で、 $f(a + bi) = 0$ をみたすものが存在するような m をすべて求めよ。ただし、 i は虚数単位である。
- (2) (1) で求めたすべての m に対して、方程式 $f(x) = 0$ を解け。

第 2 問

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, & a_{n+1} &= 4a_n \\ b_1 &= 3, & b_{n+1} &= b_n + 2a_n \\ c_1 &= 4, & c_{n+1} &= \frac{c_n}{4} + a_n + b_n \end{aligned}$$

と順に定める。放物線 $y = a_n x^2 + 2b_n x + c_n$ を H_n とする。

- (1) H_n は x 軸と 2 点で交わることを示せ。
- (2) H_n と x 軸の交点を P_n , Q_n とする。 $\sum_{k=1}^n P_k Q_k$ を求めよ。

第 3 問

放物線 $y = ax^2 + bx$ ($a > 0$) を C とする。 C 上に異なる 2 点 P, Q をとり、その x 座標をそれぞれ p, q ($0 < p < q$) とする。

- (1) 線分 OQ と C で囲まれた部分の面積が、 $\triangle OPQ$ の面積の $\frac{3}{2}$ 倍であるとき、 p と q の関係を求めよ。ただし、 O は原点を表す。
- (2) Q を固定して P を動かす。 $\triangle OPQ$ の面積が最大となるときの p を q で表せ。また、そのときの $\triangle OPQ$ の面積と、線分 OQ と C で囲まれた部分の面積との比を求めよ。

第 4 問

a を定数とし、 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + a$ とする。 $x \leq 2$ の範囲で $f(x)$ の最大値が 105 となるような a をすべて求めよ。

第 5 問

1 が書かれたカードが 1 枚, 2 が書かれたカードが 1 枚, $\dots$, n が書かれたカードが 1 枚の全部で n 枚のカードからなる組がある。この組から 1 枚を抜き出し元にもどす操作を 3 回行う。抜き出したカードに書かれた数を a, b, c とするとき, 得点 X を次の規則 (i), (ii) に従って定める。

(i) a, b, c がすべて異なるとき, X は a, b, c のうちの最大でも最小でもない値とする。

(ii) a, b, c のうちに重複しているものがあるとき, X はその重複した値とする。

$1 \leq k \leq n$ をみたす k に対して, $X = k$ となる確率を p_k とする。

(1) p_k を n と k で表せ。

(2) p_k が最大となる k を n で表せ。