

数問

数 学

2007 年 度（前期）

注 意

1. 「解答はじめ」というまで、この問題冊子を開いてはいけない。
2. 問題は1冊、解答用紙は3枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので、引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入する。

（例） 受験番号 80001 番の場合 →

8	0	0	0	1
---	---	---	---	---

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても、代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後、問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1 m を整数とし、 $f(x) = x^3 + 8x^2 + mx + 60$ とする。

- (1) 整数 a と、0 ではない整数 b で、 $f(a + bi) = 0$ をみたすものが存在するような m をすべて求めよ。ただし、 i は虚数単位である。
- (2) (1) で求めたすべての m に対して、方程式 $f(x) = 0$ を解け。

2 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, & a_{n+1} &= 4a_n \\ b_1 &= 3, & b_{n+1} &= b_n + 2a_n \\ c_1 &= 4, & c_{n+1} &= \frac{c_n}{4} + a_n + b_n \end{aligned}$$

と順に定める。放物線 $y = a_n x^2 + 2b_n x + c_n$ を H_n とする。

- (1) H_n は x 軸と 2 点で交わることを示せ。
- (2) H_n と x 軸の交点を P_n , Q_n とする。 $\sum_{k=1}^n P_k Q_k$ を求めよ。

3 放物線 $y = ax^2 + bx$ ($a > 0$) を C とする。 C 上に異なる 2 点 P , Q をとり、その x 座標をそれぞれ p , q ($0 < p < q$) とする。

- (1) 線分 OQ と C で囲まれた部分の面積が、 $\triangle OPQ$ の面積の $\frac{3}{2}$ 倍であるとき、 p と q の関係を求めよ。ただし、 O は原点を表す。
- (2) Q を固定して P を動かす。 $\triangle OPQ$ の面積が最大となるときの p を q で表せ。また、そのときの $\triangle OPQ$ の面積と、線分 OQ と C で囲まれた部分の面積との比を求めよ。

4 a を定数とし、 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + a$ とする。 $x \leq 2$ の範囲で $f(x)$ の最大値が 105 となるような a をすべて求めよ。

5 1 が書かれたカードが 1 枚、2 が書かれたカードが 1 枚、 $\dots$ 、 n が書かれたカードが 1 枚の全部で n 枚のカードからなる組がある。この組から 1 枚を抜き出し元にもどす操作を 3 回行う。抜き出したカードに書かれた数を a, b, c とするとき、得点 X を次の規則 (i), (ii) に従って定める。

(i) a, b, c がすべて異なるとき、 X は a, b, c のうちの最大でも最小でもない値とする。

(ii) a, b, c のうちに重複しているものがあるとき、 X はその重複した値とする。

$1 \leq k \leq n$ をみたす k に対して、 $X = k$ となる確率を p_k とする。

(1) p_k を n と k で表せ。

(2) p_k が最大となる k を n で表せ。

