

数問

数 学

2006 年 度（前期）

注 意

1. 「解答はじめ」というまで、この問題冊子を開いてはいけない。
2. 問題は1冊、解答用紙は3枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので、引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入する。

（例） 受験番号 80001 番の場合 →

8	0	0	0	1
---	---	---	---	---

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても、代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後、問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1 次の条件 (a), (b) をともにみたす直角三角形を考える。ただし、斜辺の長さを p , その他の 2 辺の長さを q, r とする。

(a) p, q, r は自然数で、そのうちの少なくとも 2 つは素数である。

(b) $p + q + r = 132$

(1) q, r のどちらかは偶数であることを示せ。

(2) p, q, r の組をすべて求めよ。

2 座標平面上に 1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。ただし、 $\triangle ABC$ の重心は原点の位置にあり、辺 BC は x 軸と平行である。また、頂点 A は y 軸上にあつて y 座標は正であり、頂点 C の x 座標は正である。直線 $y = x$ に関して 3 点 A, B, C と対称な点を、それぞれ A', B', C' とする。

(1) C' の座標を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ が重なる部分の面積を求めよ。

3 大きさがそれぞれ 5, 3, 1 の平面上のベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ に対して、 $\vec{z} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ とおく。

(1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を動かすとき、 $|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) $\vec{a}$ を固定し、 $\vec{a} \cdot \vec{z} = 20$ をみたすように $\vec{b}, \vec{c}$ を動かすとき、 $|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。

4 a, b を正の定数とする。関数 $y = x^3 - ax$ のグラフと、点 $(0, 2b^3)$ を通る直線はちょうど 2 点 P, Q を共有している。ただし、 P の x 座標は負、 Q の x 座標は正である。

- (1) 直線 PQ の方程式を a と b で表せ。
- (2) P および Q の座標を a と b で表せ。
- (3) $\angle POQ = 90^\circ$ となる b が存在するような a の値の範囲を求めよ。ただし、 O は原点である。

5 1, 2, 3, 4 が 1 つずつ記された 4 枚のカードがある。これらのカードから 1 枚を抜き出し元に戻すという試行を n 回繰り返す。抜き出した n 個の数の和を X_n とし、積を Y_n とする。

- (1) $X_n \leq n + 3$ となる確率を n で表せ。
- (2) Y_n が 8 で割り切れる確率を n で表せ。

