

数問

数 学

2005 年 度（前期）

注 意

1. 「解答はじめ」というまで、この問題冊子を開いてはいけない。
2. 問題は1冊、解答用紙は3枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので、引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入する。

（例） 受験番号 80001 番の場合 →

8	0	0	0	1
---	---	---	---	---

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても、代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後、問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1 k は整数であり、3 次方程式

$$x^3 - 13x + k = 0$$

は 3 つの異なる整数解をもつ。 k とこれらの整数解をすべて求めよ。

2 原点を中心とする半径 1 の円を C とし、 $0 < a < 1$, $b > 1$ とする。
 $A(a, 0)$ と $N(0, 1)$ を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを P とおく。また、 $B(b, 0)$ と N を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを Q とおく。

- (1) P の座標を a で表せ。
- (2) $AQ \parallel PB$ のとき、 $AN \cdot BN = 2$ となることを示せ。
- (3) $AQ \parallel PB$, $\angle ANB = 45^\circ$ のとき、 a の値を求めよ。

3 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ をみたす θ と正の整数 m に対して、 $f_m(\theta)$ を次のように定める。

$$f_m(\theta) = \sum_{k=0}^m \sin(\theta + 60^\circ \times k)$$

- (1) $f_5(\theta)$ を求めよ。
- (2) θ が $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ の範囲を動くとき、 $f_4(\theta)$ の最大値を求めよ。
- (3) m がすべての正の整数を動き、 θ が $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ の範囲を動くとき、 $f_m(\theta)$ の最大値を求めよ。

4 a を定数とし、 x の 2 次関数 $f(x)$, $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = x^2 - 3$$

$$g(x) = -2(x - a)^2 + \frac{a^2}{3}$$

- (1) 2 つの放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が 2 つの共有点をもつような a の範囲を求めよ。
- (2) (1) で求めた範囲に属する a に対して、2 つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする。 C_a の面積を a で表せ。
- (3) a が (1) で求めた範囲を動くとき、少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ。

5 A と B の 2 人があるゲームを繰り返す。1 回ごとのゲームで A が B に勝つ確率は p , B が A に勝つ確率は $1 - p$ であるとする。 n 回目のゲームで初めて A と B の双方が 4 勝以上になる確率を x_n とする。

- (1) x_n を p と n で表せ。
- (2) $p = \frac{1}{2}$ のとき、 x_n を最大にする n を求めよ。

