

数問

数 学

2004 年 度（前期）

注 意

1. 「解答はじめ」というまで、この問題冊子を開いてはいけない。
2. 問題は1冊、解答用紙は3枚である。白紙は問題冊子の中にはさみこんであるので、引き抜いて下書き用紙として使ってよい。
3. 全部の解答用紙に受験番号を書くこと。受験番号は次の要領で明確に記入する。

（例） 受験番号 80001 番の場合 →

8	0	0	0	1
---	---	---	---	---

4. 解答は解答用紙の所定の位置に書くこと。他の所に書くと無効になることがある。
5. 書き損じても、代わりの用紙は交付しない。
6. 試験終了後、問題冊子と白紙は持ち帰ること。

1 H を 1 辺の長さが 1 の正六角形とする。

- (1) H の中にある正方形のうち、1 辺が H の 1 辺と平行なものの面積の最大値を求めよ。
- (2) H の中にある長方形のうち、1 辺が H の 1 辺と平行なものの面積の最大値を求めよ。

2 a, b, c は整数で、 $a < b < c$ をみたす。放物線 $y = x^2$ 上に 3 点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$ をとる。

- (1) $\angle BAC = 60^\circ$ とはならないことを示せ。ただし、 $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明なしに用いてよい。
- (2) $a = -3$ のとき、 $\angle BAC = 45^\circ$ となる組 (b, c) をすべて求めよ。

3 複素数平面上に異なる 3 点 z, z^2, z^3 がある。

- (1) z, z^2, z^3 が同一直線上にあるような z をすべて求めよ。
- (2) z, z^2, z^3 が二等辺三角形の頂点になるような z の全体を複素数平面上に図示せよ。また、 z, z^2, z^3 が正三角形の頂点になるような z をすべて求めよ。

4 a は実数とし、 $f(x) = x^3 + ax^2 - 8a^2x$, $g(x) = 3ax^2 - 9a^2x$ とおく。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点 P において両方の曲線と接する直線が存在する。このとき P の座標を a で表せ。
- (2) 次の条件 (i) および (ii) をみたす直線 l が 3 本存在するような点 (u, v) の範囲を図示せよ。
 - (i) l は点 (u, v) を通る。
 - (ii) l は曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点 P において両方の曲線と接する。

5 n 枚のカードがあり、1 枚目のカードに 1, 2 枚目のカードに 2, $\dots$, n 枚目のカードに n が書かれている。これらの n 枚のカードから無作為に 1 枚を取り出してもとに戻し、もう一度無作為に 1 枚を取り出す。取り出されたカードに書かれている数をそれぞれ x, y とする。また、 k を n の約数とする。

- (1) $x + y$ が k の倍数となる確率を求めよ。
- (2) さらに、 $k = pq$ とする。ただし、 p, q は異なる素数である。 xy が k の倍数となる確率を求めよ。

