

2022年度入学試験問題

数	学
---	---

理 系

試験時間 150 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、問題が5問あります。総ページは16 ページで、問題は4 ページ以降の偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は5枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は、それぞれの解答用紙の所定の欄（2ヶ所）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は、持ち出してはいけません。
- 6 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。
- 7 この問題冊子の裏表紙には、試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空 白

空 白

〔 1 〕 座標平面上の曲線 $y = x^3 + x^2$ を C とする。また、 a を実数とし、 L_a を点 $(-1, 0)$ を通る傾き a の直線とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) C と L_a がちょうど二つの共有点をもつような a の値をすべて求めよ。
- (2) a が (1) の条件を満たすそれぞれの場合について、 C と L_a で囲まれた部分の面積を求めよ。
- (3) C と L_a がちょうど三つの共有点をもち、さらに C と L_a で囲まれた二つの部分の面積の差の絶対値が $\frac{3}{2}$ となるとき、 a の値を求めよ。

空 白

[2] a を正の実数, t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。座標平面上の 3 点 $A(0, a)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$ を頂点とする二等辺三角形の内接円を S とし, その中心が $I(0, t)$ であるとする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $\angle IBC$ を θ とおく。 t と a を, それぞれ θ を用いて表せ。
- (2) a を t を用いて表せ。
- (3) $\triangle ABC$ の重心が内接円 S の周上にあるとき, t の値を求めよ。
- (4) $\triangle ABC$ の垂心が S の周上にあるとき, t の値を求めよ。ただし, 三角形の各頂点から対辺, またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られており, その交わる点を三角形の垂心と呼ぶ。
- (5) $\triangle ABC$ の外心が S の周上にあるとき, t のとり得る値をすべて求めよ。

空 白

〔 3 〕 a, b を整数とする。また、整数の数列 $\{c_n\}$ を $c_1 = a, c_2 = b$ および漸化式

$$c_{n+2} = c_{n+1} + c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $a = 39, b = 13$ とする。このとき、二つの整数 c_5 と c_6 の最大公約数を求めよ。
- (2) a と b はともに奇数であるとする。このとき、自然数 n に対して次の命題 P_n が成り立つことを、 n についての数学的帰納法で示せ。

$$P_n : c_{3n-2} \text{ と } c_{3n-1} \text{ はともに奇数であり, } c_{3n} \text{ は偶数である。}$$

- (3) d を自然数とし、 a と b はともに d の倍数であるとする。このとき、自然数 n に対して c_n が d の倍数になることを示せ。ただし、数学的帰納法を用いて証明すること。
- (4) c_{2022} が奇数であるならば、 $a + b$ も奇数であることを示せ。

空 白

〔 4 〕 n を自然数とする。袋の中に赤玉が 3 個、白玉が $(n+5)$ 個、合計で $(n+8)$ 個の玉が入っている。また、空箱 A, B, C, D, E, F が用意されている。この準備の下で次の試行 1, 試行 2 を順に行う。

試行 1 袋から玉を 1 個取り出して、箱 A に入れる。箱 A に入れた玉が白玉なら $i = 0$ 、赤玉なら $i = 1$ とおく。

試行 2 次に、袋から白玉を n 個取り出して、箱 B に入れる。この時点で、袋に残った玉 7 個のうち、赤玉は $(3-i)$ 個、白玉は $(4+i)$ 個である。この 7 個の中から 2 個の玉を取り出して、箱 C に入れる。

試行 2 を終わったら、箱 A と箱 C の玉の色を記録して、箱 A, B, C の玉をすべて元通り袋に戻す。そして次の試行 3 を行う。

試行 3 袋から玉を 1 個取り出して、箱 D に入れる。次に、袋から玉を n 個取り出して、箱 E に入れる。最後に袋から玉を 2 個取り出して、箱 F に入れる。

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $i = 0$ であったとき、試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_0 を求めよ。また、 $i = 1$ であったとき、試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_1 を求めよ。
- (2) 試行 1 において、箱 A に赤玉が入る確率 q_A を n を用いて表せ。また、試行 1, 試行 2 を順に行うとき、箱 C に赤玉が 2 個入る確率 q_C を n を用いて表せ。
- (3) 試行 3 において、箱 D に赤玉が入るという事象を事象 X 、箱 E に入る玉がすべて白であるという事象を事象 Y 、箱 F に赤玉が 2 個入るという事象を事象 Z と呼ぶことにする。事象 X と事象 Y がともに起こる確率 $P(X \cap Y)$ を n を用いて表せ。また、事象 Y と事象 Z がともに起こる確率 $P(Y \cap Z)$ を n を用いて表せ。
- (4) (3) の事象 Y が起こったとき、(3) の事象 X が起こる条件付き確率 $P_Y(X)$ と、(3) の事象 Z が起こる条件付き確率 $P_Y(Z)$ をそれぞれ求めよ。

空 白

〔 5 〕 次の問いに答えよ。

- (1) $\sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)}$ と $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ との大小を比較せよ。
- (2) 関数 $f(x)$ を $f(x) = \sqrt{2}^x$ と定義し、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。 C 上の点 $(2, f(2))$ における接線の方程式を、実数 m, k を用いて $y = mx + k$ と表すとき、 m と k の値をそれぞれ求めよ。
- (3) $f(x)$ および m と k を (2) のように定める。すべての実数 x に対して $f(x) \geq mx + k$ が成り立つことを示せ。
- (4) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \sqrt{2}$ および漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定義する。自然数 n に対して

$$2 - a_{n+1} \leq (\log 2) \cdot (2 - a_n)$$

が成り立つことを示し、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。必要ならば、自然対数の底が $e = 2.718 \dots$ であることを用いてよい。

空 白

