

入学試験過去問題

数 学

広島大学（理系）

対象年度：2021 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

a を実数とする。関数 $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 - ax$ が $x = a$ で極大値をとるとき、次の問いに答えよ。

(1) a の満たす条件を求めよ。

(2) 次の不等式を解け。

$$|x+1| + |x-2| \leq 4$$

(3) x が (2) の範囲を動くとき、 $f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。

第 2 問

座標平面において、二つの放物線

$$y = x^2, \quad y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$$

上にそれぞれ点 $A(1, 1)$, 点 $C(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$ をとる。次の問いに答えよ。

- (1) 放物線 $y = x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり, $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CB}$ は垂直であるとする。このとき, B の座標を求めよ。
- (2) 放物線 $y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり, $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{CD}$ は垂直であるとする。このとき, D の座標を求めよ。
- (3) B, D はそれぞれ (1), (2) で定めたものとする。このとき, 四角形 $ABCD$ が正方形であることを示せ。

第 3 問

1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出た目の数を a , 2 回目に出た目の数を b , 3 回目に出た目の数を c とする。また,

$$f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) $b^2 > 4c$ である確率を求めよ。
- (2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつ確率を求めよ。
- (3) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつとき, $f'(1) = 7$ である条件付き確率を求めよ。
- (4) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつとき, 少なくとも一つが正の解である条件付き確率を求めよ。

第 4 問

a, b, c を実数とし、2 次方程式 $x^2 + x - (c - 1) = 0$ が実数解 α, β ($\alpha < \beta$) をもつとする。さらに、二つの等式 $a + b = c^2$, $a\alpha + b\beta + c = 0$ が成り立つとき、次の問いに答えよ。

- (1) α, β および $b - a$ を、それぞれ c を用いて表せ。

以下において、 a, b, c を自然数とする。

- (2) $\sqrt{4c - 3}$ が自然数でないとき、自然数 a, b, c の組を求めよ。

- (3) 自然数 s を用いて、 $4c - 3 = s^2$ と表せるとき、 s と a は等式

$$s^5 - s^4 + 6s^3 + 2s^2 + (9 - 32a)s = -15$$

を満たすことを示せ。

- (4) (3) のとき、自然数 a, b, c の組をすべて求めよ。

第 5 (A) 問

座標平面において、曲線 $y = e^x$ 上の点 $P(t, e^t)$ における法線を ℓ とし、 ℓ と y 軸との交点を Q とする。 $t \neq 0$ のとき、線分 PQ の中点を R とし、 $t = 0$ のときは $R(0, 1)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) t が実数全体を動くとき、点 R のえがく曲線 C の方程式を求めよ。
- (3) (2) の曲線 C 、 y 軸、直線 $y = e^{-2} + e^2$ で囲まれた図形 F の面積を求めよ。
- (4) (3) の図形 F を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

第 5 (B) 問

座標平面において、 $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $P(3, 0)$ とする。線分 OA に点 P で接する円 C を内接円とする $\triangle OAB$ を考える。ただし、円 C の中心は第 1 象限にあるとする。次の問いに答えよ。

- (1) OB と AB の差は一定であることを証明せよ。
- (2) 円 C の半径を r とするとき、 r のとる値の範囲を求めよ。
- (3) r が (2) の範囲で変化するとき、点 B の軌跡の方程式を求めよ。また、その概形をかけ。