

2021 年度入学試験問題

数	学
---	---

理 系

試験時間 150 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、問題が 5 問あります。総ページは 16 ページで、問題は 4 ページ以降の偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は 5 枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は、それぞれの解答用紙の所定の欄（2 ヶ所）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は、持ち出してはいけません。
- 6 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。
- 7 この問題冊子の裏表紙には、試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空 白

空 白

〔 1 〕 a を実数とする。関数 $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 - ax$ が $x = a$ で極大値をとるとき、次の問いに答えよ。

(1) a の満たす条件を求めよ。

(2) 次の不等式を解け。

$$|x+1| + |x-2| \leq 4$$

(3) x が (2) の範囲を動くとき、 $f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。

空 白

〔 2 〕 座標平面において、二つの放物線

$$y = x^2, \quad y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$$

上にそれぞれ点 A (1, 1), 点 C ($\sqrt{2} - 1$, $\sqrt{2} + 1$) をとる。次の問いに答えよ。

- (1) 放物線 $y = x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり、 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CB}$ は垂直であるとする。このとき、B の座標を求めよ。
- (2) 放物線 $y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり、 $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{CD}$ は垂直であるとする。このとき、D の座標を求めよ。
- (3) B, D はそれぞれ (1), (2) で定めたものとする。このとき、四角形 ABCD が正方形であることを示せ。

空 白

- [3] 1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出た目の数を a , 2 回目に出た目の数を b , 3 回目に出た目の数を c とする。また,

$$f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) $b^2 > 4c$ である確率を求めよ。
- (2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつ確率を求めよ。
- (3) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつとき, $f'(1) = 7$ である条件付き確率を求めよ。
- (4) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる二つの実数解をもつとき, 少なくとも一つが正の解である条件付き確率を求めよ。

空 白

[4] a, b, c を実数とし、2 次方程式 $x^2 + x - (c - 1) = 0$ が実数解 α, β ($\alpha < \beta$) をもつとする。さらに、二つの等式 $a + b = c^2$, $a\alpha + b\beta + c = 0$ が成り立つとき、次の問いに答えよ。

(1) α, β および $b - a$ を、それぞれ c を用いて表せ。

以下において、 a, b, c を自然数とする。

(2) $\sqrt{4c - 3}$ が自然数でないとき、自然数 a, b, c の組を求めよ。

(3) 自然数 s を用いて、 $4c - 3 = s^2$ と表せるとき、 s と a は等式

$$s^5 - s^4 + 6s^3 + 2s^2 + (9 - 32a)s = -15$$

を満たすことを示せ。

(4) (3) のとき、自然数 a, b, c の組をすべて求めよ。

空 白

〔 5 〕 次の (A), (B) から 1 題を**選択**して解答せよ。解答欄の (A・B) (問題番号〔5〕の右側) において, 選択した問題記号を○で囲むこと。

(A) 座標平面において, 曲線 $y = e^x$ 上の点 $P(t, e^t)$ における法線を ℓ とし, ℓ と y 軸との交点を Q とする。 $t \neq 0$ のとき, 線分 PQ の中点を R とし, $t = 0$ のときは $R(0, 1)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) t が実数全体を動くとき, 点 R のえがく曲線 C の方程式を求めよ。
- (3) (2) の曲線 C , y 軸, 直線 $y = e^{-2} + e^2$ で囲まれた図形 F の面積を求めよ。
- (4) (3) の図形 F を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

(B) 座標平面において, $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $P(3, 0)$ とする。線分 OA に点 P で接する円 C を内接円とする $\triangle OAB$ を考える。ただし, 円 C の中心は第 1 象限にあるとする。次の問いに答えよ。

- (1) OB と AB の差は一定であることを証明せよ。
- (2) 円 C の半径を r とするとき, r のとる値の範囲を求めよ。
- (3) r が (2) の範囲で変化するとき, 点 B の軌跡の方程式を求めよ。また, その概形をかけ。

空 白

