

2020 年度入学試験問題

数	学
---	---

理 系

試験時間 150 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、問題が 5 問あります。総ページは 16 ページで、問題は 4 ページ以降の偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は 5 枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は、それぞれの解答用紙の所定の欄（2 ヶ所）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は、持ち出してはいけません。
- 6 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。
- 7 この問題冊子の裏表紙には、試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空 白

空 白

[1] a, b を正の定数とする。 $0 < \theta < \pi$ を満たす実数 θ に対し、平面上で、次の三つの条件 (i), (ii), (iii) を満たす三角形 PAB, およびこの三角形と辺 AB を共有する長方形 ABCD を考える。

(i) $PA = a, PB = b, \angle APB = \theta$ である。

(ii) 2 点 C, D はともに直線 AB に関して点 P と反対側にある。

(iii) $AB = 3AD$ である。

三角形 PAB の面積と長方形 ABCD の面積の和を S とする。次の問いに答えよ。

(1) 辺 AB の長さを a, b, θ を用いて表せ。

(2) S を a, b, θ を用いて表せ。

(3) θ が $0 < \theta < \pi$ の範囲を動くときの S の最大値を M とし、 S が最大値 M をとるときの θ の値を β とする。 M を a, b を用いて表せ。また、 $\sin \beta$ および $\cos \beta$ の値をそれぞれ求めよ。

(4) $a = 16, b = 25$ とする。また、 β を (3) で定めた値とする。 $\theta = \beta$ のときの、点 P と直線 AB の距離を求めよ。

空 白

[2] i を虚数単位とする。 $z \neq -1$ を満たす複素数 z に対し,

$$w = \frac{z-i}{z+1}$$

とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $z \neq -1$ のとき $w \neq 1$ であることを示せ。また, $w \neq 1$ のとき, z を w を用いて表せ。
- (2) t を -1 と異なる実数とする。複素数平面において, 実部が t である複素数全体の描く直線を l_t とおく。点 z が直線 l_t 上を動くとき, 点 w はある円 S_t から 1 点を取り除いた図形の上を動く。この円 S_t の中心 P_t に対応する複素数を t を用いて表せ。
- (3) P_t を (2) で定義した点とする。 t が -1 以外の実数全体を動くときに P_t が描く図形を, 複素数平面上に図示せよ。

空 白

[3] 関数 $f(x) = xe^{-2x^2}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底とする。

- (1) 関数 $f(x)$ の極大値および極小値を求めよ。また、極大値をとるときの x の値、および極小値をとるときの x の値を求めよ。
- (2) $a > 0$ とし、点 $A(a, 0)$ を考える。また、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線を ℓ_t とおく。 ℓ_t が点 A を通るような実数 t がちょうど二つあるとする。このとき、 a の値を求めよ。さらに、その二つの t の値を p, q (ただし、 $p < q$) とおくとき、 p, q を求めよ。
- (3) q を (2) で定めた値とする。曲線 $y = f(x)$ 、直線 $x = q$ および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

空 白

〔 4 〕 n を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx \, dx$$

の値を求めよ。

(2) 定積分

$$\int_0^{\pi} |\sin nx| \, dx$$

の値を求めよ。

(3) 座標平面において連立不等式

$$0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, \quad y \leq |\sin nx|$$

の表す図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

(4) 座標平面において連立不等式

$$0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x} |\sin nx|$$

の表す図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

空 白

〔 5 〕 1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出た目を a_1 , 2 回目に出た目を a_2 , 3 回目に出た目を a_3 とする。次に, 1 枚の硬貨を 3 回投げる。 $k = 1, 2, 3$ に対し, k 回目に表が出た場合は $b_k = 1$, 裏が出た場合は $b_k = a_k$ とおく。ベクトル

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ である確率を求めよ。

(2) $b_1 = 1$ である確率を求めよ。

(3) $\vec{b} = (1, 1, 1)$ であったとき, $\vec{a} = (1, 1, 5)$ である条件付き確率を求めよ。

(4) $\vec{b} = (1, 1, 1)$ であったとき, $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ である条件付き確率を求めよ。

空 白

