

2018年度入学試験問題

数	学
---	---

理 系

試験時間 150 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、問題が5問あります。総ページは16 ページで、問題は4 ページ以降の偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は5枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は、それぞれの解答用紙の所定の欄（2ヶ所）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は、持ち出してはいけません。
- 6 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。
- 7 この問題冊子の裏表紙には、試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空 白

空 白

〔 1 〕 次の問いに答えよ。

(1) 次の条件 (A) を満たす座標平面上の点 (u, v) の存在範囲を図示せよ。

(A) 2 次式 $t^2 - ut + v$ は、 $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ を満たす実数 x, y を用いて $t^2 - ut + v = (t - x)(t - y)$ と因数分解される。

(2) 次の条件 (B) を満たす座標平面上の点 (u, v) の存在範囲を図示せよ。

(B) 2 次式 $t^2 - ut + v$ は、 $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2$ を満たす実数 x, y を用いて $t^2 - ut + v = (t - x)(t - y)$ と因数分解される。

(3) 座標平面上の点 (x, y) が 4 点 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 2)$ を頂点とする長方形の周および内部を動くとき、点 $(x + y, xy)$ の動く範囲の面積を求めよ。

空 白

[2] 複素数平面上の4点 $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$, $D(\delta)$ を頂点とする四角形 $ABCD$ を考える。ただし、四角形 $ABCD$ は、すべての内角が 180° より小さい四角形（凸四角形）であるとする。また、四角形 $ABCD$ の頂点は反時計回りに A , B , C , D の順に並んでいるとする。四角形 $ABCD$ の外側に、4辺 AB , BC , CD , DA をそれぞれ斜辺とする直角二等辺三角形 APB , BQC , CRD , DSA を作る。次の問いに答えよ。

- (1) 点 P を表す複素数を求めよ。
- (2) 四角形 $PQRS$ が平行四辺形であるための必要十分条件は、四角形 $ABCD$ がどのような四角形であることか答えよ。
- (3) 四角形 $PQRS$ が平行四辺形であるならば、四角形 $PQRS$ は正方形であることを示せ。

空 白

〔 3 〕 次の問いに答えよ。

(1) すべての実数 t に対し, $1 + t \leq e^t$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \sin x} dx$ の値を求めよ。

(3) 次の不等式を示せ。

$$\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\sin x} dx \leq 2 - \sqrt{2}$$

空 白

- [4] 0, 1, 2, 3 の数字が一つずつ書かれた 4 枚のカードがある。この中から 1 枚を取り出し、書かれた数字を見て元に戻す。この操作を N 回繰り返し、カードに書かれた数字を順に $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$ とする。ここで、 N は 3 以上の自然数である。さらに、複素数

$$\alpha = \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$$

を用いて、項数 N の数列 $\{X_n\}$ を

$$X_1 = \alpha^{Z_1}, \quad X_{n+1} = X_n \alpha^{Z_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots, N-1)$$

により定める。 $n = 1, 2, \dots, N$ に対し、 $X_n = \alpha$ となる確率を P_n とし、 $X_n = \alpha^2$ となる確率を Q_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) P_1 を求めよ。
- (2) $n = 1, 2, \dots, N-1$ とする。 $\alpha^{Z_{n+1}} = 1$ となる確率を求めよ。
- (3) $n = 1, 2, \dots, N$ とする。 $X_n = 1$ となる確率を、 P_n と Q_n を用いて表せ。
- (4) $n = 1, 2, \dots, N-1$ に対し、 P_n を用いて P_{n+1} を表せ。
- (5) $n = 1, 2, \dots, N$ に対し、 P_n を求めよ。

空 白

- [5] 座標平面上で、曲線 $C: y = x^3 - 3x$ と、 $b > a^3 - 3a$ を満たすように動く点 $P(a, b)$ を考える。また、点 P に対し、二つの不等式

$$|x - a| \leq 1, \quad |y - b| \leq 1$$

によって表される座標平面上の領域を B とする。領域 B と曲線 C に対して、 B と C が共有点 Q をもち、さらに B と C の共有点が B の境界線上にしかないとき、 B と C は点 Q で接するということにする。次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C の概形をかき、さらに点 P の座標が $(-2, 3)$ のときの領域 B を図示せよ。
- (2) B と C が $x < -1$ の範囲にある点で接するように、点 P は動くとする。このときの点 P の軌跡を求めよ。
- (3) B と C がある点で接するように点 P は動くとする。このときの点 P の軌跡を求めよ。
- (4) (3) の点 P の軌跡は、ある関数 $y = f(x)$ のグラフで表すことができる。この $f(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示せ。

空 白

