

2017年度入学試験問題

数	学
---	---

理 系

試験時間 150 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、問題が5問あります。総ページは16 ページで、問題は4 ページ以降の偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は5枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は、それぞれの解答用紙の所定の欄（2ヶ所）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は、持ち出してはいけません。
- 6 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。
- 7 この問題冊子の裏表紙には、試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空 白

空 白

〔 1 〕 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \tan \frac{\pi}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + 1} + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。次の問いに答えよ。

- (1) $a_2 = \tan \frac{\pi}{6}$, $a_3 = \tan \frac{\pi}{12}$ であることを示せ。
- (2) 一般項 a_n を表す n の式を推定し、それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n$ を求めよ。

空 白

〔 2 〕 $a > 0$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(t) = t^3 - 2at + 1$ の区間 $t \geq 0$ における最小値を、 a を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく。 A^3 を求めよ。
- (3) 座標平面上の曲線 $y = x^4$ を C_1 、点 $(0, a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする。 C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ。
- (4) 座標平面において、点 P が曲線 $y = x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0, a)$ の距離の最小値を考える。その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ。

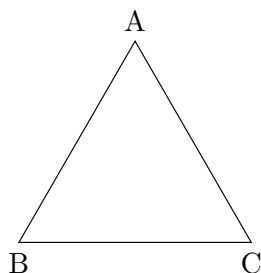
空 白

- [3] 表が出る確率が p 、裏が出る確率が $1 - p$ であるようなコインがある。ただし、 $0 < p < 1$ である。このとき、下図のような正三角形の 3 頂点 A, B, C を次の規則で移動する動点 R を考える。

コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し、裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する。

R は最初 A にあり、全部で $(2N + 3)$ 回移動する。ここで、 N は自然数である。移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k ($k = 2, 3, \dots, 2N + 3$) とする。次の問いに答えよ。

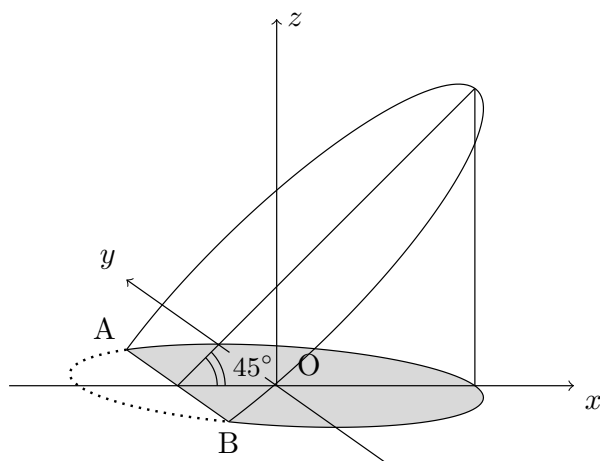
- (1) P_2, P_3 を求めよ。
- (2) P_{2m}, P_{2m+1} ($2 \leq m \leq N + 1$) を求めよ。
- (3) $p = \frac{1}{2}$ とする。移動回数がちょうど $2N + 3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ。



空 白

〔 4 〕 座標空間内の平面 $H : z = 0$ とその上の曲線 $C : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を考える。
 C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする。 C 上の 2
 点 $A \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$, $B \left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right)$ に対し, 線分 AB を含み平面 H
 と 45° の角をなす平面を T とする。ただし, 平面 T と z 軸の交点の z 座標は
 正であるとする。平面 H , 平面 T および曲面 K が囲む二つの立体のうち z
 軸と交わるものを V とする。次の問いに答えよ。

- (1) 立体 V と平面 H の共通部分 (下図の灰色で示される部分) の面積を求めよ。
- (2) 立体 V を平面 $x = t$ ($-1 < t < 2$) で切ったとき, 断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。
- (3) 立体 V の体積を求めよ。



空 白

[5] x 座標, y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ。格子点 $O(0, 0)$ および $A(50, 14)$ を考える。次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 6$ を満たす格子点 P を一つ求めよ。
- (2) m を自然数とする。 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 6$ を満たす格子点 P のうち、長さ OP が m 番目に小さい点を P_m とする。 P_1 および P_2 を求めよ。
- (3) P_m を (2) で定めた格子点とする。自然数 k に対し、ベクトル $\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}$ および $\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+2}}$ を成分表示せよ。
- (4) P_m を (2) で定めた格子点とする。 Q を $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{P_{14}P_{16}}$ を満たす点とする。四角形 $OQP_{16}P_{14}$ の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ。

空 白

