

2016 年度入学試験問題

数	学
---	---

理 系

試験時間 150 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、問題が 5 問あります。総ページは 16 ページで、問題は 4 ページ以降の偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は 5 枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は、それぞれの解答用紙の所定の欄（2 ヶ所）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は、持ち出してはいけません。
- 6 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。
- 7 この問題冊子の裏表紙には、試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空 白

空 白

〔 1 〕 座標空間に 4 点

$$O(0, 0, 0), \quad A(s, s, s), \quad B(-1, 1, 1), \quad C(0, 0, 1)$$

がある。ただし、 $s > 0$ とする。 t, u, v を実数とし、

$$\vec{d} = \vec{OB} - t\vec{OA}, \quad \vec{e} = \vec{OC} - u\vec{OA} - v\vec{OB}$$

とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\vec{OA} \perp \vec{d}$ のとき、 t を s を用いて表せ。

(2) $\vec{OA} \perp \vec{d}$, $\vec{OA} \perp \vec{e}$, $\vec{d} \perp \vec{e}$ のとき、 u, v を s を用いて表せ。

(3) (2) のとき、2 点 D, E を

$$\vec{OD} = \vec{d}, \quad \vec{OE} = \vec{e}$$

となる点とする。四面体 OADE の体積が 2 であるとき、 s の値を求めよ。

空 白

〔 2 〕 次の問いに答えよ。

(1) a を正の定数とする。関数 $f(x) = \frac{e^x - ae^{-x}}{2}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(2) (1) で求めた $f^{-1}(x)$ の導関数を求めよ。

(3) c を正の定数とする。 x 軸, y 軸, 直線 $x = c$ および曲線 $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + c^2}}$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

空 白

〔 3 〕 複素数平面上を、点 P が次のように移動する。

1. 時刻 0 では、 P は原点にいる。時刻 1 まで、 P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する。移動後の P の位置を $Q_1(z_1)$ とすると、 $z_1 = 1$ である。
2. 時刻 1 に P は $Q_1(z_1)$ において進行方向を $\frac{\pi}{4}$ 回転し、時刻 2 までその方向に速さ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_2(z_2)$ とすると、 $z_2 = \frac{3+i}{2}$ である。
3. 以下同様に、時刻 n に P は $Q_n(z_n)$ において進行方向を $\frac{\pi}{4}$ 回転し、時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_{n+1}(z_{n+1})$ とする。ただし n は自然数である。

$\alpha = \frac{1+i}{2}$ として、次の問いに答えよ。

- (1) z_3, z_4 を求めよ。
- (2) z_n を α, n を用いて表せ。
- (3) P が $Q_1(z_1), Q_2(z_2), \dots$ と移動するとき、 P はある点 $Q(w)$ に限りなく近づく。 w を求めよ。
- (4) z_n の実部が (3) で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ。

空 白

〔 4 〕 xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり、次の試行を行う。

1 枚の硬貨を投げ、表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1、裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く。ただし、点 $(3, 1)$ に到達したら Q は原点に戻る。

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を (x_n, y_n) とする。次の問いに答えよ。

- (1) $(x_4, y_4) = (0, 0)$ となる確率を求めよ。
- (2) $(x_8, y_8) = (5, 3)$ となる確率を求めよ。
- (3) $x_8 + y_8 \leq 4$ となる確率を求めよ。
- (4) $x_{4n} + y_{4n} \leq 4k$ となる確率を n と k で表せ。ここで k は n 以下の自然数とする。

空 白

〔 5 〕 数列

$$x_n = 2^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を考える。この数列は 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, $\dots$ であるが、各項の下 1 桁をみると、1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, $\dots$ となっており、2 から循環が始まり循環の周期は 4 である。次の問いに答えよ。

- (1) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 2 桁は、あるところから循環する。循環が始まる
ところと、循環の周期を求めよ。ここで、1 桁の数に対しては 0 を補っ
て下 2 桁とみなすことにする。たとえば、2 の下 2 桁は 02 とする。
- (2) 4 の倍数で、25 で割って 1 余る 2 桁の自然数 A を求めよ。
- (3) 8 の倍数で、125 で割って 1 余る 3 桁の自然数 B を求めよ。
- (4) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 3 桁は、あるところから循環する。循環が始まる
ところと、循環の周期を求めよ。ここで、 2^m を 125 で割って 1 余るよ
うな最小の自然数 m が 100 であることを用いてもよい。

空 白

