

# 入学試験過去問題

## 数 学

広島大学（理系）

対象年度：2015 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

## 第 1 問

座標平面上の点  $P(1, 1)$  を中心とし、原点  $O$  を通る円を  $C_1$  とする。 $k$  を正の定数として、曲線  $y = \frac{k}{x}$  ( $x > 0$ ) を  $C_2$  とする。 $C_1$  と  $C_2$  は 2 点で交わり、その交点を  $Q$ ,  $R$  とするとき、直線  $PQ$  は  $x$  軸に平行であるとする。点  $Q$  の  $x$  座標を  $q$  とし、点  $R$  の  $x$  座標を  $r$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $k, q, r$  の値を求めよ。
- (2) 曲線  $C_2$  と線分  $OQ, OR$  で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ。
- (3)  $x = 1 + \sqrt{2} \sin \theta$  とおくことにより、定積分  $\int_r^q \sqrt{2 - (x - 1)^2} dx$  の値を求めよ。
- (4) 円  $C_1$  の原点  $O$  を含まない弧  $QR$  と曲線  $C_2$  で囲まれた図形を、 $x$  軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積  $V$  を求めよ。

## 第 2 問

座標平面上の放物線

$$C_n : y = x^2 - p_n x + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える。ただし,  $p_n, q_n$  は

$$p_1^2 - 4q_1 = 4, \quad p_n^2 - 4q_n > 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

を満たす実数とする。 $C_n$  と  $x$  軸との二つの交点を結ぶ線分の長さを  $\ell_n$  とする。また,  $C_n$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積  $S_n$  は

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left( \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} \right)^3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1)  $C_n$  の頂点の  $y$  座標を  $\ell_n$  を用いて表せ。
- (2) 数列  $\{\ell_n\}$  の一般項を求めよ。
- (3)  $p_n = n\sqrt{n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) であるとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left( -\frac{2q_n}{n^2} \right)$  を求めよ。ただし,  $\log x$  は  $x$  の自然対数である。

### 第 3 問

座標空間内に 5 点

$$O(0, 0, 0), \quad A\left(0, 0, \frac{3}{4}\right), \quad B\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \quad C(s, t, 0), \quad D(0, u, 0)$$

がある。ただし、 $s, t, u$  は実数で、 $s > 0, t > 0, s + t = 1$  を満たすとする。3 点 A, B, C の定める平面が  $y$  軸と点 D で交わっているとき、次の問いに答えよ。

- (1) 直線 AB と  $x$  軸との交点の  $x$  座標を求めよ。
- (2)  $u$  を  $t$  を用いて表せ。また、 $0 < u < 1$  であることを示せ。
- (3) 点  $(0, 1, 0)$  を E とする。点 D が線分 OE を  $12 : 1$  に内分するとき、 $t$  の値を求めよ。

## 第 4 問

$a, b, p$  は  $a > 0, b > 0, p < 0$  を満たす実数とする。座標平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = e^x, \quad C_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を考える。ただし、 $e$  は自然対数の底である。 $C_1$  と  $C_2$  が点  $(p, e^p)$  を共有し、その点における  $C_1$  の接線と  $C_2$  の接線が一致するとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $p$  を  $a$  を用いて表せ。
- (2)  $\lim_{a \rightarrow \infty} (p + a)$  を求めよ。
- (3)  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{b^2 e^{2a}}{a}$  を求めよ。

## 第 5 問

$m, n$  を自然数とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $m \geq 2, n \geq 2$  とする。異なる  $m$  種類の文字から重複を許して  $n$  個を選び、1 列に並べる。このとき、ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。
- (2)  $n \geq 3$  とする。3 種類の文字  $a, b, c$  から重複を許して  $n$  個を選び、1 列に並べる。このとき  $a, b, c$  すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。
- (3)  $n \geq 3$  とする。 $n$  人を最大 3 組までグループ分けする。このときできたグループ数が 2 である確率  $p_n$  を求めよ。ただし、どのグループ分けも同様に確からしいとする。

たとえば、 $n = 3$  のとき、A, B, C の 3 人のグループ分けする方法は

$$\{(A, B, C)\}, \{(A, B), (C)\}, \{(A, C), (B)\}, \\ \{(B, C), (A)\}, \{(A), (B), (C)\}$$

の 5 通りであるので、 $p_3 = \frac{3}{5}$  である。

- (4) (3) の確率  $p_n$  が  $\frac{1}{3}$  以下となるような  $n$  の範囲を求めよ。