

2015年度入学試験問題

数	学
---	---

理 系

試験時間 150 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、問題が5問あります。総ページは16 ページで、問題は4 ページ以降の偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は5枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は、それぞれの解答用紙の所定の欄（2ヶ所）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は、持ち出してはいけません。
- 6 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。
- 7 この問題冊子の裏表紙には、試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空 白

空 白

〔 1 〕 座標平面上の点 $P(1, 1)$ を中心とし、原点 O を通る円を C_1 とする。 k を正の定数として、曲線 $y = \frac{k}{x} \ (x > 0)$ を C_2 とする。 C_1 と C_2 は 2 点で交わり、その交点を Q, R とするとき、直線 PQ は x 軸に平行であるとする。点 Q の x 座標を q とし、点 R の x 座標を r とする。次の問いに答えよ。

(1) k, q, r の値を求めよ。

(2) 曲線 C_2 と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(3) $x = 1 + \sqrt{2} \sin \theta$ とおくことにより、定積分 $\int_r^q \sqrt{2 - (x - 1)^2} dx$ の値を求めよ。

(4) 円 C_1 の原点 O を含まない弧 QR と曲線 C_2 で囲まれた図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

空 白

〔 2 〕 座標平面上の放物線

$$C_n : y = x^2 - p_n x + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を考える。ただし、 p_n, q_n は

$$p_1^2 - 4q_1 = 4, \quad p_n^2 - 4q_n > 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

を満たす実数とする。 C_n と x 軸との二つの交点を結ぶ線分の長さを ℓ_n とする。また、 C_n と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n は

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} \right)^3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

- (1) C_n の頂点の y 座標を ℓ_n を用いて表せ。
- (2) 数列 $\{\ell_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $p_n = n\sqrt{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(-\frac{2q_n}{n^2} \right)$ を求めよ。ただし、 $\log x$ は x の自然対数である。

空 白

〔 3 〕 座標空間内に 5 点

$$O(0, 0, 0), \quad A\left(0, 0, \frac{3}{4}\right), \quad B\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \quad C(s, t, 0), \quad D(0, u, 0)$$

がある。ただし、 s, t, u は実数で、 $s > 0, t > 0, s + t = 1$ を満たすとする。3 点 A, B, C の定める平面が y 軸と点 D で交わっているとき、次の問いに答えよ。

- (1) 直線 AB と x 軸との交点の x 座標を求めよ。
- (2) u を t を用いて表せ。また、 $0 < u < 1$ であることを示せ。
- (3) 点 $(0, 1, 0)$ を E とする。点 D が線分 OE を $12 : 1$ に内分するとき、 t の値を求めよ。

空 白

[4] a, b, p は $a > 0, b > 0, p < 0$ を満たす実数とする。座標平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = e^x, \quad C_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を考える。ただし、 e は自然対数の底である。 C_1 と C_2 が点 (p, e^p) を共有し、その点における C_1 の接線と C_2 の接線が一致するとき、次の問いに答えよ。

- (1) p を a を用いて表せ。
- (2) $\lim_{a \rightarrow \infty} (p + a)$ を求めよ。
- (3) $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{b^2 e^{2a}}{a}$ を求めよ。

空 白

〔 5 〕 m, n を自然数とする。次の問いに答えよ。

- (1) $m \geq 2, n \geq 2$ とする。異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び、1 列に並べる。このとき、ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。
- (2) $n \geq 3$ とする。3 種類の文字 a, b, c から重複を許して n 個を選び、1 列に並べる。このとき a, b, c すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。
- (3) $n \geq 3$ とする。 n 人を最大 3 組までグループ分けする。このときできたグループ数が 2 である確率 p_n を求めよ。ただし、どのグループ分けも同様に確からしいとする。

たとえば、 $n = 3$ のとき、 A, B, C の 3 人のグループ分けする方法は

$$\{(A, B, C)\}, \{(A, B), (C)\}, \{(A, C), (B)\},$$

$$\{(B, C), (A)\}, \{(A), (B), (C)\}$$

の 5 通りであるので、 $p_3 = \frac{3}{5}$ である。

- (4) (3) の確率 p_n が $\frac{1}{3}$ 以下となるような n の範囲を求めよ。

空 白

