

2013年度入学試験問題

数	学
---	---

理 系

試験時間 150 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、問題が5問あります。総ページは16 ページで、問題は4 ページ以降の偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は5枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は、それぞれの解答用紙の所定の欄（2ヶ所）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は、持ち出してはいけません。
- 6 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。
- 7 この問題冊子の裏表紙には、試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空 白

空 白

[1] $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。座標平面上で原点 O を通り傾きが $\tan \theta$ の直線を ℓ とし、行列

$$\begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

の表す 1 次変換を f とする。座標平面上に 2 点 P, Q がある。次の問いに答えよ。

- (1) 線分 OP が直線 ℓ と垂直であるとき、1 次変換 f による点 P の像を求めよ。
- (2) 1 次変換 f による点 Q の像を R とする。このとき $|\overrightarrow{OR}| \leq |\overrightarrow{OQ}|$ が成り立つことを示せ。さらに等号が成立する場合を調べよ。
- (3) 1 次変換 f による点 $(1, 1)$ の像を S とする。このとき $|\overrightarrow{OS}|$ が最大となる θ と最小となる θ をそれぞれ求めよ。

空 白

- 〔 2 〕 座標平面上の点で、 x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。
 n を 3 以上の自然数とし、連立不等式

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq n$$

の表す領域を D とする。格子点 $A(a, b)$ に対して、領域 D 内の格子点 $B(c, d)$ が $|a - c| + |b - d| = 1$ を満たすとき、点 B を点 A の隣接点という。次の問いに答えよ。

- (1) 領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ。
- (2) 領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき、隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ。ただし、格子点の選ばれる方は同様に確からしいものとする。
- (3) 領域 D から異なる格子点を 2 つ選ぶとき、互いに隣接点である確率を求めよ。ただし、異なる格子点の選ばれる方は同様に確からしいものとする。

空 白

〔 3 〕 座標平面上の 2 点 $A(0, 1)$, $B(t, 0)$ を考える。ただし, $t \geq 0$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AB を 1 辺とする正三角形が 2 つある。それぞれの正三角形について, 2 点 A , B 以外の頂点の座標を t を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた 2 点のうち x 座標が小さい方を C とする。 t を動かすとき, 点 C の軌跡を図示せよ。
- (3) k を定数とする。点 B と直線 $y = kx$ 上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで 3 点 A , B , P を頂点とする正三角形ができるとき, k の値の範囲を求めよ。

空 白

[4] 平面上の3点 O, A, B は $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$ かつ $\angle AOB = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) を満たすとする。線分 AB の中点を M とする。 $t > 1$ として、点 C を $\overrightarrow{OC} = -t\overrightarrow{OM}$ となるように定める。 $\triangle ABC$ の面積を S とする。次の問いに答えよ。

- (1) S を t と θ を用いて表せ。
- (2) $|\overrightarrow{OC}| = 1$ のとき、 S を t のみを用いて表せ。
- (3) $|\overrightarrow{OC}| = 1$ のとき、 S が最大となる t の値を求めよ。

空 白

〔 5 〕 次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

(1) $x \geq 2$ のとき、 $x^4 e^{-3x} \leq 16e^{-6}$ を示せ。また、これを用いて $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-3x}$ を求めよ。

(2) k を定数とする。 $x > 0$ の範囲で方程式

$$x e^{-3x} = \frac{k}{x^2}$$

がちょうど 2 つの解 α, β ($\alpha < \beta$) をもつような k の値の範囲を求めよ。

(3) (2) の α, β が $\beta = 2\alpha$ を満たすとき、曲線 $y = x e^{-3x}$ ($x > 0$) と曲線 $y = \frac{k}{x^2}$ ($x > 0$) で囲まれた部分の面積を求めよ。

空 白

