

入学試験過去問題

数 学

広島大学（理系）

対象年度：2011 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

実数 a, b に対して, 2 次正方行列 A と列ベクトル B を

$$A = \begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1+a & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix}$$

と定め, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。等式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$$

により, 座標平面上の点 $P(x, y)$ に対し点 $P'(x', y')$ が定まるものとする。次の問いに答えよ。

- (1) $a = b = -1$ のとき, 点 $P'(3, 2)$ となる点 $P(x, y)$ を求めよ。
- (2) $A^2 = kE$ (k は実数) を満たすとき, a, k の値を求めよ。
- (3) どんな点 P に対しても点 P' が原点 O に一致しないための a, b の条件を求めよ。

第 2 問

次の問いに答えよ。

- (1) $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを証明せよ。
- (2) p, q を異なる自然数とすると、 $p \log_2 3$ と $q \log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ。
- (3) $\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ。

第 3 問

次の問いに答えよ。

- (1) a, b, c を定数とする。関数 $f(x) = a \cos^2 x + 2b \cos x \sin x + c \sin^2 x$ が定数となるための a, b, c の条件を求めよ。

- (2) 関数

$$g(x) = 4 \cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x - \frac{5}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right)$$

が最大値をとる x の値を θ とする。 $\cos 2\theta, \sin 2\theta$ の値を求めよ。

- (3) (2) の関数 $g(x)$ と θ に対して、定積分 $\int_0^\theta g(x) dx$ を求めよ。

第 4 問

平面上で、線分 AB を $1:2$ に内分する点を O とし、 O を中心とする半径 OB の円を S 、円 S と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする。点 P は円 S の内部にあり、線分 BC 上にないものとする。円 S と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする。 $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$ 、 $\angle APB = \theta$ とおくとき、次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{PO}$ 、 $\overrightarrow{PC}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ で表せ。

(2) 点 P が円 S の内部にあることを用いて、 $\cos \theta < \frac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$ を証明せよ。

(3) PQ の長さを $|\vec{a}|$ 、 $|\vec{b}|$ 、 θ で表せ。

(4) $PA = 3$ 、 $PB = 2$ とする。 $\triangle QAB = 3\triangle POB$ を満たすとき、 $\triangle PAB$ の面積を求めよ。

第 5 問

$\triangle ABC$ の頂点は反時計回りに A, B, C の順に並んでいるとする。点 A を出発した石が、次の規則で動くとする。

コインを投げて表が出たとき反時計回りに隣の頂点に移り、裏が出たときは動かない。コインを投げて表と裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とする。

コインを n 回投げたとき、石が点 A, B, C にある確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) a_1, b_1, c_1 の値を求めよ。
- (2) $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を a_n, b_n, c_n で表せ。また、 a_2, b_2, c_2 および a_3, b_3, c_3 の値を求めよ。
- (3) a_n, b_n, c_n のうち 2 つの値が一致することを証明せよ。
- (4) (3) において一致する値を p_n とするとき、 p_n を n で表せ。