

# 2011 年度入学試験問題

|   |   |
|---|---|
| 数 | 学 |
|---|---|

理 系

試験時間 150 分

## 答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、問題が 5 問あります。総ページは 16 ページで、問題は 4 ページ以降の偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は 5 枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は、それぞれの解答用紙の所定の欄（2 ヶ所）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は、持ち出してはいけません。
- 6 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。
- 7 この問題冊子の裏表紙には、試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空 白

空 白

〔 1 〕 実数  $a, b$  に対して、2 次正方行列  $A$  と列ベクトル  $B$  を

$$A = \begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1+a & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix}$$

と定め、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする。等式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$$

により、座標平面上の点  $P(x, y)$  に対し点  $P'(x', y')$  が定まるものとする。  
次の問いに答えよ。

- (1)  $a = b = -1$  のとき、点  $P'(3, 2)$  となる点  $P(x, y)$  を求めよ。
- (2)  $A^2 = kE$  ( $k$  は実数) を満たすとき、 $a, k$  の値を求めよ。
- (3) どんな点  $P$  に対しても点  $P'$  が原点  $O$  に一致しないための  $a, b$  の条件を求めよ。

空 白

〔 2 〕 次の問いに答えよ。

- (1)  $\log_2 3 = \frac{m}{n}$  を満たす自然数  $m, n$  は存在しないことを証明せよ。
- (2)  $p, q$  を異なる自然数とすると、 $p \log_2 3$  と  $q \log_2 3$  の小数部分は等しくないことを証明せよ。
- (3)  $\log_2 3$  の値の小数第 1 位を求めよ。

空 白

〔 3 〕 次の問いに答えよ。

(1)  $a, b, c$  を定数とする。関数  $f(x) = a \cos^2 x + 2b \cos x \sin x + c \sin^2 x$  が定数となるための  $a, b, c$  の条件を求めよ。

(2) 関数

$$g(x) = 4 \cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x - \frac{5}{2} \quad \left( -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right)$$

が最大値をとる  $x$  の値を  $\theta$  とする。 $\cos 2\theta, \sin 2\theta$  の値を求めよ。

(3) (2) の関数  $g(x)$  と  $\theta$  に対して、定積分  $\int_0^\theta g(x) dx$  を求めよ。



空 白

[ 4 ] 平面上で、線分  $AB$  を  $1:2$  に内分する点を  $O$  とし、 $O$  を中心とする半径  $OB$  の円を  $S$ 、円  $S$  と直線  $AB$  との交点のうち点  $B$  と異なる方を  $C$  とする。点  $P$  は円  $S$  の内部にあり、線分  $BC$  上にないものとする。円  $S$  と直線  $PB$  との交点のうち点  $B$  と異なる方を  $Q$  とする。 $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$ 、 $\angle APB = \theta$  とおくとき、次の問いに答えよ。

(1)  $\overrightarrow{PO}$ 、 $\overrightarrow{PC}$ 、 $\overrightarrow{OB}$  を  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  で表せ。

(2) 点  $P$  が円  $S$  の内部にあることを用いて、 $\cos \theta < \frac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$  を証明せよ。

(3)  $PQ$  の長さを  $|\vec{a}|$ 、 $|\vec{b}|$ 、 $\theta$  で表せ。

(4)  $PA = 3$ 、 $PB = 2$  とする。 $\triangle QAB = 3\triangle POB$  を満たすとき、 $\triangle PAB$  の面積を求めよ。

空 白

〔 5 〕  $\triangle ABC$  の頂点は反時計回りに A, B, C の順に並んでいるとする。点 A を出発した石が、次の規則で動くとする。

コインを投げて表が出たとき反時計回りに隣の頂点に移り、裏が出たときは動かない。コインを投げて表と裏の出る確率はそれぞれ  $\frac{1}{2}$  とする。

コインを  $n$  回投げたとき、石が点 A, B, C にある確率をそれぞれ  $a_n, b_n, c_n$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $a_1, b_1, c_1$  の値を求めよ。
- (2)  $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$  を  $a_n, b_n, c_n$  で表せ。また、 $a_2, b_2, c_2$  および  $a_3, b_3, c_3$  の値を求めよ。
- (3)  $a_n, b_n, c_n$  のうち 2 つの値が一致することを証明せよ。
- (4) (3) において一致する値を  $p_n$  とするとき、 $p_n$  を  $n$  で表せ。

空 白





