

2009年度入学試験問題

数	学
---	---

理 系

試験時間 150 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、問題が5問あります。総ページは16 ページで、問題は4 ページ以降の偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は5枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は、それぞれの解答用紙の所定の欄（2ヶ所）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は、持ち出してはいけません。
- 6 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。
- 7 この問題冊子の裏表紙には、試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空 白

空 白

〔 1 〕 以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え、真の場合は証明を、偽の場合は反例を与えよ。

- (1) すべての 2 行 2 列の行列 A, B に対して、 $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ が成立する。
- (2) 2 行 2 列の行列 A が $A^2 = E$ を満たすならば、 $A = E$ または $A = -E$ である。ただし、 E は単位行列とする。
- (3) 微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a) = 0$ を満たすならば、 $f(x)$ は $x = a$ において極値をとる。
- (4) n が 2 以上の自然数ならば、 $1 + 2 + \cdots + n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

空 白

〔 2 〕 座標平面上の 3 点 $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(x, y)$ を考える。ただし $y > 0$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle ABC$ が二等辺三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め、点 C の存在範囲を図示せよ。
- (2) $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め、点 C の存在範囲を図示せよ。
- (3) 3 つの角 $\angle CAB, \angle ABC, \angle BCA$ をそれぞれ α, β, γ とし、不等式

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとする。そのとき x, y が満たす条件を求め、点 C の存在範囲を図示せよ。

- (4) x, y が (3) の条件を満たすとき、 γ がとりうる値の範囲を求めよ。

空 白

〔 3 〕 曲線 $y = e^x$ 上の点 $A(0, 1)$ における接線を ℓ とし、点 $B(0, 2)$ を通り直線 ℓ に平行な直線を m とする。直線 m と曲線 $y = e^x$ の 2 つの交点 P, Q の x 座標をそれぞれ α, β (ただし $\alpha < \beta$) とする。直線 $x = \alpha$ と直線 ℓ の交点を P' 、直線 $x = \beta$ と直線 ℓ の交点を Q' とする。次の問いに答えよ。

- (1) 平行四辺形 $PP'Q'Q$ の面積 S を α, β で表せ。
- (2) 直線 m と曲線 $y = e^x$ によって囲まれる図形の面積 T を α, β の多項式で表せ。
- (3) 線分 PQ の中点 R は第 2 象限にあることを示せ。
- (4) $\alpha + \beta > -1$ であることを示せ。

空 白

[4] 四面体 OABC において,

$$\angle AOB = \angle AOC = \frac{\pi}{2}, \quad \angle BOC = \frac{\pi}{3}, \quad OA = OB = 2, \quad OC = 1$$

とする。3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ とする。
 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき, $\vec{p}$ は実数 s, t を用いて

$$\vec{p} = (1 - s - t) \vec{a} + s \vec{b} + t \vec{c}$$

と表される。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{p} \cdot \vec{a}$, $\vec{p} \cdot \vec{b}$, $\vec{p} \cdot \vec{c}$ を s, t を用いて表せ。
- (2) 点 P が $\angle AOP = \angle BOP = \angle COP$ を満たすとき, s, t の値を求めよ。
- (3) (2) の条件を満たす点 P について, 直線 AP と直線 BC の交点を Q, 直線 BP と直線 AC の交点を R とする。BQ : QC および AR : RC を求めよ。
- (4) (2) の条件を満たす点 P について, 3 つの四面体 OABP, OBCP, OCAP の体積の比を求めよ。

空 白

[5] 2 人のプレイヤー A, B が対戦を繰り返すゲームを行う。1 回の対戦につき A が勝つ確率は p であり, B が勝つ確率は $1 - p$ であるとする (ただし $0 < p < 1$)。A と B は初めにそれぞれ 2 枚の金貨を持っている。1 回の対戦につき勝者は敗者から 1 枚の金貨を受け取る。対戦を繰り返して一方のプレイヤーがすべての金貨を手に入れたとき, ゲームを終了する。ちょうど n 回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする。ただし n は自然数とする。

(1) P_4 を求めよ。

(2) P_{2n-1} を求めよ。

(3) P_{2n} を求めよ。

(4) $2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ。

(5) $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ とする。 p と S の大小関係を調べよ。

空 白

