

入学試験過去問題

数 学

広島大学（理系）

対象年度：2007 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

a, b, c, d は $a + c = b + d = 1$ を満たす正の定数とし、行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。
さらに、 $x_1 + y_1 = 1$ を満たす実数 x_1, y_1 に対し、 x_n, y_n ($n = 2, 3, 4, \dots$) を漸化式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

によって帰納的に定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $x_n + y_n = 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)であることを示せ。
- (2) x_n をまず a, b, x_{n-1} で表し、次に a, b, x_1 で表せ。
※ x_n を表すとき、必要ならば n も使ってよい。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。

第 2 問

座標空間の 2 点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, -1, 0)$ および

$$\vec{u} = (-1, 2, 5), \quad \vec{v} = (1, 1, 1), \quad \vec{w} = (-1, 3, 1)$$

と成分表示される 3 つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{AP}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{BP}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ。
- (2) 上で求めた点 P に対し、 $\overrightarrow{CP}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 $C(0, 0, c)$ を求めよ。
- (3) 上で求めた点 P と C に対し、 P は 3 点 A, B, C の定める平面上にあることを示せ。

第 3 問

$f(x) = \frac{8x+21}{3x+8}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$ であることを示せ。

(2) $x \geq 0$ ならば $f(x) \geq 2$ であることを示せ。

(3) $x \geq 2, y \geq 2$ ならば

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{100}$$

となることを示せ。

(4) $x \geq 2$ ならば

$$|f(f(x)) - \sqrt{7}| \leq \frac{|x - \sqrt{7}|}{10000}$$

となることを示し、これを用いて $|r - \sqrt{7}| < 10^{-4}$ を満たす有理数 r を 1 つ求めよ。

第 4 問

$0 < b < a$ を満たす定数 a, b に対し, 2つの楕円

$$A: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad B: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

を考える。また α, β は

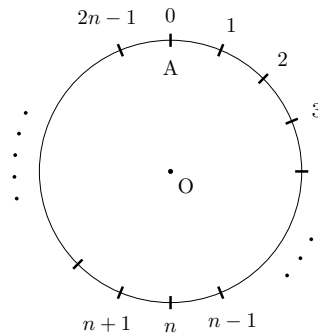
$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

を満たす 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間の実数とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ を示せ。
- (2) 2つの楕円 A, B の第 1 象限にある交点の座標を求めよ。
- (3) 楕円 A で囲まれる図形と楕円 B で囲まれる図形の共通部分のうち, $x \geq 0, y \geq 0$ の範囲にある部分の面積 S を a, b, β を用いて表せ。

第 5 問

n を 2 以上の整数とする。中心を O とする円の周を $2n$ 等分して、図のように 0 から $2n-1$ までの目盛りを付ける。目盛りが 0 の点を A とする。一方、袋の中に 1 から $2n-1$ までの整数を書いた玉がそれぞれ 1 個ずつ入っている。この袋から玉を 2 つ取り出して、玉に書かれた数と同じ目盛りを持つ 2 点をとる。2 点のうち、目盛りの大きい方を B 、目盛りの小さい方を C として、 $\triangle ABC$ を考える。次の問いに答えよ。



- (1) 辺 BC 上に点 O がある場合は何通りあるか。
- (2) $\triangle ABC$ の辺上に点 O がある確率を求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ の内部に点 O がある確率は $\frac{n-2}{2(2n-1)}$ であることを示せ。
- (4) $\triangle ABC$ の辺上に点 O があるとき $X = 1$, $\triangle ABC$ の内部に点 O があるとき $X = 2$, それ以外のとき $X = 0$ とする。 X の期待値を求めよ。