

2007年度入学試験問題

数	学
---	---

理 系

試験時間 150 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、問題が5問あります。総ページは16 ページで、問題は4 ページ以降の偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は5枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は、それぞれの解答用紙の所定の欄（2ヶ所）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は、持ち出してはいけません。
- 6 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。
- 7 この問題冊子の裏表紙には、試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空 白

空 白

〔 1 〕 a, b, c, d は $a+c=b+d=1$ を満たす正の定数とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。さらに, $x_1+y_1=1$ を満たす実数 x_1, y_1 に対し, x_n, y_n ($n=2, 3, 4, \dots$) を漸化式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

によって帰納的に定める。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $x_n + y_n = 1$ ($n=1, 2, 3, \dots$)であることを示せ。
- (2) x_n をまず a, b, x_{n-1} で表し, 次に a, b, x_1 で表せ。
 ※ x_n を表すとき, 必要ならば n も使ってよい。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。

空 白

〔 2 〕 座標空間の 2 点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, -1, 0)$ および

$$\vec{u} = (-1, 2, 5), \quad \vec{v} = (1, 1, 1), \quad \vec{w} = (-1, 3, 1)$$

と成分表示される 3 つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{AP}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{BP}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ。
- (2) 上で求めた点 P に対し, $\overrightarrow{CP}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 $C(0, 0, c)$ を求めよ。
- (3) 上で求めた点 P と C に対し, P は 3 点 A, B, C の定める平面上にあることを示せ。

空 白

[3] $f(x) = \frac{8x+21}{3x+8}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $f(\sqrt{7}) = \sqrt{7}$ であることを示せ。

(2) $x \geq 0$ ならば $f(x) \geq 2$ であることを示せ。

(3) $x \geq 2, y \geq 2$ ならば

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{100}$$

となることを示せ。

(4) $x \geq 2$ ならば

$$|f(f(x)) - \sqrt{7}| \leq \frac{|x - \sqrt{7}|}{10000}$$

となることを示し、これを用いて $|r - \sqrt{7}| < 10^{-4}$ を満たす有理数 r を1つ求めよ。

空 白

[4] $0 < b < a$ を満たす定数 a, b に対し, 2 つの楕円

$$A: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad B: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

を考える。また α, β は

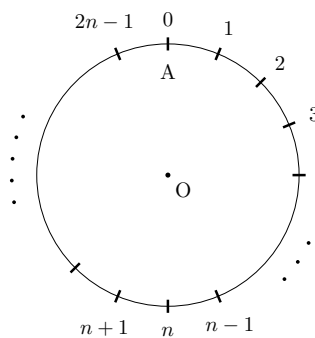
$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

を満たす 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間の実数とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ を示せ。
- (2) 2 つの楕円 A, B の第 1 象限にある交点の座標を求めよ。
- (3) 楕円 A で囲まれる図形と楕円 B で囲まれる図形の共通部分のうち,
 $x \geq 0, y \geq 0$ の範囲にある部分の面積 S を a, b, β を用いて表せ。

空 白

- [5] n を 2 以上の整数とする。中心を O とする円の周を $2n$ 等分して、図のように 0 から $2n - 1$ までの目盛りを付ける。目盛りが 0 の点を A とする。一方、袋の中に 1 から $2n - 1$ までの整数を書いた玉がそれぞれ 1 個ずつ入っている。この袋から玉を 2 つ取り出して、玉に書かれた数と同じ目盛りを持つ 2 点をとる。2 点のうち、目盛りの大きい方を B ，目盛りの小さい方を C として、 $\triangle ABC$ を考える。次の問いに答えよ。



- (1) 辺 BC 上に点 O がある場合は何通りあるか。
- (2) $\triangle ABC$ の辺上に点 O がある確率を求めよ。
- (3) $\triangle ABC$ の内部に点 O がある確率は $\frac{n-2}{2(2n-1)}$ であることを示せ。
- (4) $\triangle ABC$ の辺上に点 O があるとき $X = 1$ ， $\triangle ABC$ の内部に点 O があるとき $X = 2$ ，それ以外のとき $X = 0$ とする。 X の期待値を求めよ。

空 白

