

入学試験過去問題

数 学

広島大学（理系）

対象年度：2005 年

試験時間：150 分

問題数：5 問

第 1 問

行列 I と J が

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であるとき、次の問いに答えよ。

(1) 行列

$$J^2, \quad J^3, \quad J^4$$

は、それぞれ、 I または J の定数倍になることを示せ。

(2) 実数 a と b について、行列

$$aI + bJ$$

が逆行列をもつための必要十分条件を求めよ。

(3) 任意の実数 s, t に対して、行列

$$sI + (1 + st)J + tJ^2 + st^2J^3 + t^2J^4$$

は逆行列をもつことを示せ。

第 2 問

正の実数 a, b, c を係数とする 3 次方程式

$$(*) \quad x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

が、純虚数の解をもつとする。次の問いに答えよ。

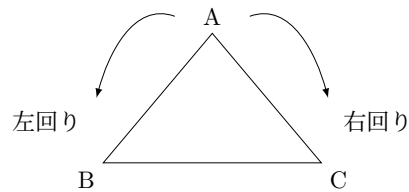
- (1) $ab - c$ の値を求めよ。
- (2) 複素数平面上で方程式 $x^3 + 8 = 0$ の 3 個の解が表す点を頂点とする三角形を考える。方程式 $(*)$ の解が表すすべての点がこの三角形の頂点または辺上にあるとき、 a, b, c の値を求めよ。

第 3 問

2 枚のコインを同時に投げて、三角形 ABC の 1 つの頂点にある駒を、

2 枚とも表が出たとき、左回りで隣の頂点に移動し、2 枚とも裏が出たとき、右回りで隣の頂点に移動し、表と裏が出たとき、動かさない

という試行を考える。初めに駒を頂点 A に置く。この試行を n 回繰り返したとき、1 回目の試行後の駒の位置を X_1 、2 回目の試行後の駒の位置を X_2 、 $\dots$ 、 n 回目の試行後の駒の位置を X_n とする。次の問いに答えよ。



- (1) この試行を 2 回繰り返したとき、 X_2 が A である確率 P_2 を求めよ。
- (2) この試行を 4 回繰り返したとき、最後の X_4 のみが A である確率 Q_4 を求めよ。
- (3) この試行を n 回 ($n \geq 2$) 繰り返したとき、最後の X_n のみが A である確率 Q_n を求めよ。
- (4) この試行を n 回 ($n \geq 2$) 繰り返したとき、 X_n が A である確率 P_n を求めよ。

第 4 問

実数全体で定義された関数

$$f(x) = \frac{4x + a}{x^2 + 1}$$

は、 $x = \frac{1}{2}$ で極値をもつ。ただし、 a は定数である。次の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。
- (3) 定積分 $\int_0^1 f(x) dx$ の値を求めよ。

第 5 問

次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x) = 4x^3 - 3x + \frac{1}{2}$ の増減を調べて極値を求めよ。

(2) 公式

$$\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$$

を用いて、 $k = \cos \frac{2\pi}{9}$ は方程式 $f(x) = 0$ の解であることを示せ。

(3) $k > \frac{3}{4}$ であることを示せ。

(4) 方程式 $\cos x = x$ の解を α とするとき、

$$\frac{2\pi}{9} < \alpha < \frac{\pi}{4}$$

を示せ。ここで、 $3.14 < \pi < 3.15$ を利用してもよい。