

2002年度入学試験問題

数	学
---	---

理 系

試験時間 150 分

答案作成上の注意

- 1 この問題冊子には、問題が 6 問あります。総ページは 20 ページで、問題は 4 ページ以降の偶数ページにあります。
- 2 解答用紙は 6 枚です。解答はすべて対応する番号の解答用紙の所定の解答欄（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。
- 3 受験番号は、それぞれの解答用紙の所定の欄（2 ヶ所）に必ず記入しなさい。
- 4 試験終了後は、解答用紙の右上の番号の順に並べなさい。
- 5 配付した解答用紙は、持ち出してはいけません。
- 6 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。
- 7 この問題冊子の裏表紙には、試験時間中に机の上に置いてよいものを記載しています。

空 白

空 白

[1] 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ は次の 3 つの条件 (i), (ii), (iii) を満たすとする。ただし, $a \neq 0$, $c \neq 0$, $b > d$ で, O は 2 次の零行列である。

$$(i) \ A^2 = A, \quad (ii) \ B^2 = B, \quad (iii) \ AB = O$$

(1) a, b, c, d の値を求めよ。

(2) 実数 p, q がどちらも 0 でないとき, $(pA + qB)(xA + yB) = 2E$ となる実数 x, y を p, q を用いて表せ。ただし, E は 2 次の単位行列である。

空 白

〔 2 〕 条件 $a_1 = -30$, $9a_{n+1} = a_n + \frac{4}{3^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $b_n = 3^n a_n$ とおくとき, 数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(3) a_n を最大にする n の値を求めよ。

空 白

〔 3 〕 C_1 を曲線 $y = e^x$, C_2 を曲線 $y = x \log x$ ($x > 0$) とする。ただし, $\log$ は自然対数を表す。また, $x = e$ で定義される直線を ℓ_1 , ℓ_1 と C_2 との交点 P を通り x 軸に平行な直線を ℓ_2 , ℓ_2 と C_1 との交点 Q を通り y 軸に平行な直線を ℓ_3 とする。

(1) 2 点 P, Q の座標を求めよ。

(2) $x \geq 1$ のとき, $e^x > x \log x$ であることを示せ。

(3) 2 直線 ℓ_1, ℓ_3 と 2 曲線 C_1, C_2 によって囲まれた図形の面積を求めよ。

空 白

〔 4 〕 xy 平面上を移動する点 P を考える。はじめに、点 P は原点にあるとする。
4 枚のカードに上、下、左、右の 4 つの文字を 1 つずつ書いて、それらを袋に入れておく。

1 枚のカードを取り出し、
カードに書かれた文字の方向に 1 だけ点 P を移動させて、
取り出したカードを袋に戻す。

という試行を繰り返す。上、下、左、右と書かれたカードは、それぞれ同じ確からしきで取り出されるものとする。

- (1) 上, 上, 下, 左, 右, 右, 右の 7 文字すべてを 1 列に並べてできる文字列は何通りあるか。
- (2) この試行を 7 回くりかえしたときに、点 P が座標 $(2, 1)$ にある確率を求めよ。
- (3) この試行を 5 回くりかえしたときに、点 P が x 軸上にある確率を求めよ。
- (4) この試行を 2 回くりかえしたときの点 P の座標を (X, Y) とする。
 $|X - Y|$ の期待値を求めよ。

空 白

[5] C を曲線 $a^2x^2 + y^2 = 1$, ℓ を直線 $y = ax + 2a$ とする。ただし, a は正の定数である。

- (1) C と ℓ とが異なる 2 点で交わるための a の範囲を求めよ。
- (2) C 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求めよ。
- (3) (1) における交点を P, Q とし, 点 P における C の接線と点 Q における C の接線との交点を $R(X, Y)$ とする。 a が (1) の範囲を動くとき, X, Y の関係式と Y の範囲を求めよ。

空 白

[6] ℓ を複素数平面上の直線 $z = t(1 + i)$ (t は実数), α, β を複素数とする。
ただし, 点 α は ℓ 上にないとする。

(1) $\alpha = i\beta$ または $\alpha = \bar{\beta}$ ならば, ℓ 上のすべての点 z に対して $\left| \frac{\bar{z} - \beta}{z - \alpha} \right| = 1$
であることを示せ。

(2) ℓ 上のすべての点 z に対して $\left| \frac{\bar{z} - \beta}{z - \alpha} \right| = 1$ ならば, $\alpha = i\beta$ または
 $\alpha = \bar{\beta}$ であることを示せ。

(3) ℓ 上の異なる 2 定点 z_1, z_2 があって $\frac{\bar{z}_1 - \beta}{z_1 - \alpha}$ と $\frac{\bar{z}_2 - \beta}{z_2 - \alpha}$ は同じ複素数
になるとする。この複素数を γ とおくと, ℓ 上のすべての点 z に対し
 $\frac{\bar{z} - \beta}{z - \alpha} = \gamma$ となることを示せ。また γ の値を求めよ。

空 白

